# Misoppfatninger rundt funksjonsbegrepet

## - En undersøkelse blant elever i videregående skole

Masteroppgave i realfagdidaktikk

av

Kristin Rønningstad

Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling

Universitetet i Oslo

Mai 2009

# Forord

Jeg har gjennom denne oppgaven undersøkt hvilke misoppfatninger elever i den videregående skole kan ha innen området funksjoner. Det har vært spennende og interessant og jeg har fått mulighet til å lære mer om matematikkdidaktikk og forskning. Til tider har det vært ganske frustrerende, men likefullt veldig verdifullt og viktig med hensyn til faglig refleksjon og egenutvikling. Noe jeg håper mine elever kan få glede av.

Professor Gunnar Gjone ved ILS har vært en god veileder gjennom hele perioden med mange konstruktive innspill. Videre vil jeg takke min tidligere matematikklærer, høgskolelektor Kyrre Haugan for gode råd. Jeg vil også takke min gode kollega Anne Sophie Klaveness Sinnerud som har tatt seg tid til å lese korrektur og kommet med gode råd.

Til slutt vil jeg takke min kjære Odd som har støttet og oppmuntret meg gjennom krevende stunder i prosessen. Og ikke minst vil jeg takke alle mine kjære barn Kasper, Kamilla, Marte og Eirik for deres tålmodighet.

Blindern, mai 2009

Kristin Rønningstad

# Innholdsfortegnelse

# 1 Innledning

Jeg ønsker med denne oppgaven å undersøke hvilke misoppfatninger elever i den videregående skole kan ha i matematikk og da spesielt innen området funksjoner.

Funksjonsbegrepet er av fundamental betydning i matematikken og spiller en viktig rolle i svært mange av matematikkens anvendelser. Dessverre viser det seg at en del elever sliter med dårlig forståelse av funksjoner. KIM-prosjektet (Kvalitet I Matematikkundervisningen) har avdekket noen typiske misoppfatninger blant elever i grunnskolen. Med denne undersøkelsen ønsker jeg å finne ut om elever i videregående skole sliter med de samme misoppfatningene.

Ved å benytte diagnostiske oppgaver og analyse av disse, ønsker jeg å påvise misoppfatninger elever i den videregående skole kan ha rundt begrepet funksjoner.  I tillegg ønsker jeg å utdype enkelte funn ved å intervjue aktuelle elever. Gjennom intervjuene vil jeg prøve forstå hvordan elever som har misoppfatninger tenker og resonerer. Jeg ønsker å finne ut hva som kan være årsaken til at elever har misoppfatninger. Her vil jeg bruke utviklingspsykologiske teorier til å prøve å forstå hvordan læring foregår hos den enkelte; hvordan kunnskapen konstrueres. Videre ønsker jeg med utgangspunkt i tidligere forskning å diskutere hvordan man kan legge opp undervisningen for å unngå misoppfatninger.

## 1.1 Problemstilling

Følgende problemstilling ligger til grunn for oppgaven:

- *Hvilke misoppfatninger kan elever i videregående skole ha rundt begrepet funksjoner?*

Jeg vil videre diskutere:

- *Hva kan være årsak til at elever har misoppfatninger?*
- *Hvordan legge opp undervisningen for om mulig å unngå misoppfatninger?*

## 1.2 Oppbygging av oppgaven

Oppgaven består av 5 hoveddeler:

- Den første delen er en kort innledning der jeg søker å begrunne hvorfor jeg har valgt dette temaet og det er videre gjort kort rede for hva slags undersøkelse dette er.

- Del 2 er et teorikapittel. Her beskrives ulike teorier om utvikling av kunnskap og ulike teoretiske perspektiver på utviklingen av selve begrepet funksjoner. Herunder refereres til forskning gjort på området. Viktige begreper som blant annet misoppfatninger, kunnskapsteoretiske hinder, diagnostisk undervisning defineres. Videre forklares hva som menes med læringsstrategier og metakognisjon.

- Jeg benytter både kvantitativ og kvalitativ metode i min undersøkelse. Metoden står omtalt i kapittel 3. Her beskrives hvordan data er samlet inn og litt om verktøyet som er benyttet til selve analysen.

- Resultater og analyse av undersøkelsen blir behandlet i kapittel 4. Her blir ulike misoppfatninger diskutert og forsøkt knyttet opp mot aktuelle deler av teorien.

- Den siste delen er en diskusjon rundt de funnene jeg har gjort i analysen knyttet opp mot teorien som står omtalt i kapittel 2. Her fokuseres på hvordan misoppfatninger kan oppstå og hvilke hensyn man kan ta i undervisningen. Til slutt en oppsummering der jeg trekker noen konklusjoner i forhold til problemstillingene mine.

Hvordan konstrueres kunnskap hos den enkelte elev? Til å besvare dette spørsmålet vil jeg bruke Utviklingspsykologi som bygger på kognitive teorier. Videre har vi didaktikere som bygger på disse teoriene; blant annet Anna Sfard, Georg Polya, Alan Schoenfeld, Snorre Ostad og Anna Sierpinska. Sistnevnte har forsket på oppfatningen av funksjoner og kunnskapsteoretiske hinder knyttet til dette, noe jeg vil se nærmere på.

Hvordan foregår selve læringsprosessen? Jeg ønsker å knytte problemstillingen opp mot læringsstrategier og metakognisjon. Hvordan legges det i undervisningssituasjonen til rette for at elevene skal kunne konstruere kunnskap? Hvilke strategier brukes i undervisningen?

Det finnes ulike teoretiske perspektiver på utviklingen av begrepet funksjoner. Her vil jeg referere til blant annet Anna Sierpinska, Anna Sfard, Ed Dubinsky, David Tall. Både hos Anna Sfard og Anna Sierpinska fokuseres det spesielt på misoppfatninger.

### 1.3 Historisk utvikling av begrepet funksjoner

Det vi i skolematematikken kaller funksjonslære hører til under det emnet vi i matematikken omtaler som matematisk analyse. Funksjonsbegrepet er svært viktig i matematikken og et grunnbegrep i analysen. Det utviklet seg historisk ved erkjennelsen av at det lar seg gjøre å utforske geometriske egenskaper ved hjelp av algebra. På 1300-tallet tok man til å betrakte konturene av en figur som det ”geometriske stedet” til et punkt som beveget seg. I begynnelsen av det sekstende århundre var det den franske filosofen og matematikeren Rene Descartes (1596-1650) som forente algebraen og geometrien. Vi fikk den grafiske framstillingen av funksjoner i et koordinatsystem som vi alle kjenner i dag. Navnet til Descartes finner vi igjen i betegnelsen *kartesisk* koordinatsystem og kartesiske koordinater. Rene Descartes brukte koordinatsystemet for å vise at løsningen for et likningssett svarer til skjæringen mellom kurvene. For eksempel:

I $\quad x + 2y = 6$

II $\quad 3x - 2y = 4$

Descartes lanserte det algebraiske tegnspråket slik vi kjenner det i dag, med x som symbolet på en ukjent. Men den store forskjellen fra i dag var at de algebraiske uttrykkene ikke dannet utgangspunktet for å tegne grafene. Descartes konstruerte aldri kurver ut fra algebraiske uttrykk. Det var kurvene som var utgangspunktet for likningen (Lutzen, 1978).

Descartes anerkjente ikke de negative tallene og bruker derfor kun første kvadrant. Det var Pierre de Fermat (1601-1665) som først innførte bruken av alle fire kvadrantene. Fermat betraktes som grunnleggeren av den analytiske geometrien, og utviklet blant annet metoder for å finne maksimum for en kurve ved bruk av derivasjon. Fermats arbeid var forløperen for Isaac Newtons (1640-1727) og Gottfried Wilhelm Leibniz´s (1646-1716) arbeid med utviklingen av differensial- og integralregningen. Newton var den første som kom med definisjonen av den deriverte og den første til å nærme seg definisjonen av grensebegrepet slik vi kjenner det i funksjonslæren i dag. Newton arbeidet for det meste med fysiske størrelser som varierte med tiden. Leibniz la stor vekt på det formelle symbolspråket i matematikk. Begrepene konstant, variabel og parameter i vår betydning ble også innført av Leibniz, men ordet funksjon brukte han i en annen betydning enn det vi gjør i dag. Definisjonen av funksjoner var fremdeles geometrisk og det var grafen som dannet utgangspunktet for det algebraiske uttrykket.

Det var først med Johann Bernoulli (1667-1748) at funksjonsbegrepet kom til å likne mer på det vi har i dag. Hans funksjonsbegrep er knyttet til forestillingen om et funksjonsuttrykk eller en formel (statisk definisjon).

Det funksjonsbegrepet som Leonard Euler (1707-1783) setter i sentrum av analysen er definert i hans verk i Introductio kap. 1 §4, ved:

*En funksjon av en variabel størrelse er et analytisk uttrykk, som på en eller annen måte er sammensatt av denne variable størrelsen og av tall eller konstante størrelser (Euler, 1734).*

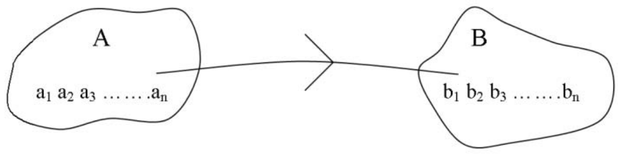
Denne definisjonen stammer fra Johann Bernoulli. På grunn av den sentrale plassen denne definisjonen av funksjonsbegrepet fikk i Eulers verk, har den fått navnet det Eulerske funksjonsbegrep (Lutzen, 1975). For Euler var en funksjon i praksis det samme som en formel. En av svakhetene med denne definisjonen er at han ikke presiserer hva han mener med et analytisk uttrykk. Med dette funksjonsbegrepet beveger definisjonen seg bort fra geometrien. Men det er også klart at det Eulerske funksjonsbegrepet ikke baserer seg på sammenhengen mellom variable. Dette kom først inn i definisjonen i hans utvidede funksjonsbegrep:

*Når x står for en variabel størrelse, så heter alle størrelser, som på en eller annen måte avhenger av x eller bestemmes av x, funksjoner av x (Euler, 1755).*

Euler innførte funksjonssymbolet f(x). De første definisjonene av funksjonsbegrepet var knyttet til kontinuerlige kurver. Med teorien om Fourier-rekker oppdaget matematikerne det utilstrekkelige i det Eulerske funksjonsbegrepet. Lejune Dirichlet (1805-1850) kom med følgende definisjon av en kontinuerlig funksjon:

*Dersom enhver verdi for x gir en entydig verdi for y på en slik måte, at når x gjennomløper intervallet fra a til b kontinuerlig, så endrer y=f(x) seg litt etter litt, så heter y en kontinuerlig funksjon av x i dette intervallet (Dirichlet, 1837).*

Denne definisjonen er mindre generell, idet den eksplisitt forutsetter kontinuitet. Videre antas det at variabelen, x, gjennomløper et intervall, noe som er en forandring i forhold til de tidligere abstrakte definisjonene. En annen stor forandring fra tidligere definisjoner er kravet om entydighet. Dirichlet var en av de første matematikerne som i sin definisjon av funksjonsbegrepet benyttet sammenhengen mellom variable størrelser. Hans definisjon danner dermed utgangspunktet for det moderne funksjonsbegrepet, som ses på som en universell korrespondanse mellom to mengder.




**Figur 1**: Til ethvert a $\in$ A finnes det en og bare en b $\in$ B.

### 1.4 Elevenes møte med funksjoner i den videregående skolen

Hvordan funksjonsbegrepet blir presentert for elevene i den videregående skolen varierer. De forskjellige lærebøkene introduserer funksjonsbegrepet på ulike måter.

Eksempler på definisjoner i ulike lærebøker:

”Når hver verdi av x gir en bestemt verdi for y, sier vi at y er en funksjon av x” (*1P*, Heir, 2006) .

”Når det til hver verdi av x svarer én bestemt verdi for y, sier vi at y er en funksjon av x” (*1T*, Heir, 2006).

”y er en funksjon av x hvis hver mulig verdi av x gir nøyaktig én verdi av y” (*1T*, Oldervoll, 2007).

Mange elever sliter med å se sammenhenger som at f(x) og y står for den samme verdien. Disse to måtene å referere til funksjonsverdien på blir brukt om hverandre. 1P-boka (Praktisk) bruker ikke f(x), mens 1T-boka (Teoretisk) starter med funksjonsuttrykk på formen y= og introduserer f(x)= etter hvert. Videre står f(x) både for navnet på funksjonen og for verdien av funksjonen f og koordinatene til et punkt blir beskrevet på ulike måter som (x,y) og (x,f(x)). Dette skaper forvirring hos en del elever.

Forskningsresultater (Gjone, 1997; Janvier, 1978; Sierpinska, 1992) tyder på at elever har bestemte forventninger til funksjonsgrafen og dens utseende, noe som kan føre til ulike misoppfatninger:

- De ser på grafen som et bilde av situasjonen
- De tolker grafen som et kart
- De har problemer med å forholde seg to variable samtidig og se disse i sammenheng over et intervall
- De har lenge et lineært bilde av funksjoner

Skal en prosess i naturen eller i en bedrift beskrives ved hjelp av matematikk, er det ofte greit å gjøre dette ved hjelp av nettopp funksjoner. Det å finne funksjoner som beskriver en gitt prosess kalles matematisk modellering. Funksjonene er matematiske modeller av den virkelige prosessen. Et eksempel på et kompetansemål etter kunnskapsløftet er: ”Mål for opplæringen er at elevene skal kunne lage og tolke funksjoner som modellerer og beskriver praktiske problemstillinger i økonomi og samfunnsfag” (*S1*, Oldervoll, 2007, s. 314). For å klare dette, må elevene beherske de ulike representasjonsformene til funksjoner og forstå sammenhengen mellom disse. Eksempler på ulike representasjonsformer er: tabell, graf, algebraisk utrykk/formel og situasjon/verbal beskrivelse.

### 1.5 Betydningen av funksjonsbegrepet

> *Function is the single most important concept from kindergarten to graduate school and is critical throughout the full range education. Arithmetic in the early grades, algebra in middle and high school, and transformational geometry in high school are all coming to be based on the idea of function.* (Guershon Harel and Ed Dubinsky, 1992)
>
> *As mathematical education is being renewed and reformed throughout the world, we remain convinced that this movement requires that we learn more about the concept of function from both epistemological and pedagogical point of view.* (Guershon Harel and Ed Dubinsky, 1992)

Funksjonsbegrepet kan sees på som et slags samlebegrep som danner et rammeverk i studiet av matematikk (Tall & DeMario, 1999). Betydningen av begrepet funksjoner kommer tydelig frem gjennom nettverket av relasjoner til andre matematiske begreper. Å utvikle forståelse av funksjonsbegrepet innebærer en forståelse av dette nettverket av relasjoner.

Funksjonsbegrepet har blitt et så sentralt begrep i skoler og på universitet at det er blitt stilt spørsmål om funksjoner kan brukes til å gi elevene bedre matematisk forståelse (DeMarios & Tall, 1999). Man tenker her på funksjons-begrepet som en kognitiv grunnbetydning; et begrep som er grunnleggende for videre kognitiv utvikling. Kan funksjoner bidra til en kunnskapsmessig utvikling i matematikk generelt?

### 1.6 Hvordan tilegne seg begrepet funksjoner

For at elevene skal bli i stand til å bruke funksjonsbegrepet fleksibelt og i ulike sammenhenger, må de igjennom en læringsprosess. Og på hvilken måte funksjoner bør introduseres for elevene, er det mange meninger om. Mange forskere mener at begrepet funksjoner bør introduseres som noe dynamisk, som en relasjon, og ikke som noe statisk og rigid (Sfard, 1992; Sierpinska, 1994 ). Ulike måter å tilnærme seg stoffet på bør benyttes og det er viktig å legge vekt på de ulike representasjonsformene til funksjoner (Janvier 1978). Uansett hva som anbefales, så vil matematikklærerens kunnskap om og holdning til begrepet funksjoner prege undervisningen og det budskapet elevene mottar.

Ulike studier innen matematikken har benyttet ulike teoretiske perspektiv. Den kognitive teorien er en av dem. Utviklingen av kunnskap ses på som en psykologisk prosess som skjer hos det enkelte individ. I forsøk på å forklare hvordan elevenes begrepsmessige utvikling foregår, brukes ofte ”prosess-objekt”-perspektivet (Sfard, 1992). En annen teori som bygger på samme tankegangen er Gray & Tall (1994) sin ”procept”- modell. DeMarios & Tall (1996) har utviklet enda et rammeverk med et videre perspektiv. Her blir termene ”facet” og ”layer” benyttet for å utdype hva som legges i begrepene prosess og objekt.

### 1.7 Misoppfatninger

Misoppfatninger kan forklares som grunnfestede holdninger som blir stående i veien for en logisk og riktig tilnærming til en problemstilling. Disse misoppfatningene vil da forringe læringsprosessen på en negativ måte (Frøystein, 1998).

En feil en elev gjør under løsing av matematiske oppgaver kan være mer eller mindre tilfeldig. Eleven kan misforstå oppgaven eller gjøre slurvefeil. En misoppfatning er ikke tilfeldig – bak en misoppfatning ligger en ide, en oppfatning om sammenheng som eleven bruker konsekvent. Dette kan være resultatet av at eleven har forsøkt å knytte ny kunnskap sammen med tidligere kunnskap hvor generaliseringen fra gammel til ny kunnskap ikke gjelder fullt ut (Brekke, 1995).

### 1.8 Misoppfatninger rundt begrepet funksjoner

Elevers problemer med funksjoner er vel kjent og det er et tema det har vært forsket en del på (Janvier, 1978; Sierpinska, 1998; Sfard, 1991; Dubinsky & Harel, 1992). Det viser seg at elever har problemer med å se sammenhengen mellom ulike representasjoner av funksjoner; grafer, algebraiske uttrykk, tabell, tekst, osv. Gjennom egen erfaring opplever jeg også at språket som brukes kan virke forvirrende på enkelte elever. Algebraiske uttrykk med tall, bokstaver og symboler skaper vansker og utfordringer. f(x) står både for navnet på funksjonen og for verdien av funksjonen f. En del elever har også den oppfatningen at en funksjon må være monotont økende eller synkende på grunn av definisjonen av en funksjon: ”For enhver x-verdi fins det en og kun en y-verdi”, (men enhver y-verdi kan ha flere x-verdier).

I undervisningen er det viktig å få elevene til å innse at de ideer og begreper de har dannet, ikke alltid gjelder i nye situasjoner. Dersom en elev har ufullstendige tanker knyttet til et begrep, sier vi at han har misoppfatninger. Misoppfatninger oppstår når en elev prøver å skape mening i det han lærer og bruker tidligere ervervet kunnskap som ikke gjelder fullt ut

I lærebøkene er kunnskapstilnærmingen ofte abstrakt og ”tekninsk” og fokuserer på å plotte punkter og tegne grafer (Sierpinska, 1994). Lærebøkene påvirker elevers og læreres valg av læringsstrategi. Få strategivarianter begrenser muligheten til å utvikle gode matematikkunnskaper. Er det slik at elevene lærer seg en algoritme å løse oppgavene med uten å forstå betydningen av det resultatet de får? Lærebøker har tradisjonelt lagt hovedvekt på eksempel-regel-metoden, hvor det gis eksempler som bygger oppunder en regel og hvor elevene skal gjøre tilsvarende oppgaver etterpå (Schoenfeld, 1992). Elevene får fakta og ferdighetstrening. Elevenes visuelle erfaringer er ofte begrenset til stereotype figurer i læreboka. Når elevene skal transformere en verbalt beskrevet sammenheng mellom to variable til en graf, er det mange som tilpasser grafen billedlig til selve hendelsesforløpet. Noen elever tolker en graf som et kart og noen har en geometrisk forklaring. De mangler forståelse av økning, minking, maksimum og minimum når de får en virkelighetsnær oppgave. Disse elever har en svak begrepsforståelse (Janvier, 1978). Dette betyr at læringsarbeidet ofte bygger på en ufullstendig begrepsoppfattelse og dermed preges av misoppfatninger.

Diskusjoner rundt matematiske problemstillinger mellom lærer og elevene, kan være med på å avklare misoppfatninger og styrke elevenes begreper. Elevene må være trygge dersom de skal våge å dele sine egne tanker og nye kunnskaper med lærer og medelever. I en tillitsfull atmosfære kan dette brukes som utgangspunkt for videre læring og dypere innsikt.

### 1.9 Utfordringer

Hvilken form for matematikkompetanse har morgendagens samfunn bruk for? Vi får stadig nye læreplaner. De gamle læreplanene må utvides for å ta med ny kunnskap. Vi skal ta i bruk ny teknologi og de sosiale behov skal innfris. Hva skal det legges vekt på? Anvendt matematikk eller ren matematikk. Anvendt matematikk hvor funksjoner kan være nyttige i praktiske situasjoner. Eller ren matematikk hvor man skyver anvendelsesmulighetene i bakgrunn og konsentrerer seg om de matematiske reglene som gjelder. Grafer blir i stadig større grad benyttet i aviser og tidsskrifter. For å holde seg oppdatert i dagens samfunn, for å forstå innholdet i aviser og andre publikasjoner, er kunnskaper om funksjoner nødvendig. Hvordan skal vi bygge opp matematikkunnskapen for å gjøre dagens unge rustet til å løse fremtidens problemer?

# 2 Teoridel

Teoridelen har som mål å:

- belyse hvordan kunnskap konstrueres generelt for å bruke dette til å forklare konstruksjon av begrepet funksjoner spesielt.
- belyse undervisningssituasjonen ved å diskutere ulike læringsstrategier og hva som ligger i begrepet metakognisjon.
- belyse misoppfatninger om funksjoner ved å beskrive ulike didaktikeres forskning på området.

Dette danner et grunnlag for å:

- diskutere ulike grunner til at elever kan ha misoppfatninger.
- diskutere mulige forbedringer i undervisningssituasjonen for å prøve å unngå at elevene utvikler misoppfatninger.

Den teorien jeg har valgt ut, skal sammen med metoden og de dataene den gir, bidra til å besvare problemstillingene mine.

## 2.1 Kognitive teorier

Kognitive teorier legger vekt på å forstå de indre mentale prosesser i forbindelse med læringen, som en konsekvens av ytre påvirkningsfaktorer. Den kognitive psykologien er opptatt av å forklare hva som skjer når vi lærer, hvordan kunnskapen organiseres i hjernen og hvilke metoder hjernen bruker. En ser på læring som en akkumulativ prosess hvor individet gradvis internaliserer mer og mer kompleks og abstrakt kunnskap. Undervisningen må i følge dette konsentreres om hvilke elementer av kunnskap eleven har, hvilke kunnskaper elven trenger, hvordan den skal presenteres og i hvilken form og rekkefølge for best å oppnå koding, lagring og gjenfinning (tilbakekalling).

Oppmerksomheten vår velger til enhver tid ut en del av den informasjonen sanseinntrykkene våre utsettes for (Vavik, 1999). Denne informasjonen lagres i korttidsminnet som også kalles arbeidsminnet. Arbeidsminnet har sterkt begrenset kapasitet. Tar vi inn ny informasjon, forsvinner den tidligere informasjonen. Dersom informasjonen ikke skal forsvinne, må den flyttes fra arbeidsminnet til langtidsminnet. Informasjonen må bearbeides, noe som innenfor kognitiv psykologi kalles *repetisjon*. Når informasjonen flyttes til langtidsminnet, kalles dette for *koding* (*repetisjon* fører til at informasjonen blir *kodet* i langtidsminnet). Informasjonen har blitt til kunnskap. Når man senere skal bruke informasjonen hentes denne fra langtidsminnet til arbeidsminnet. Dette kalles *tilbakekalling* (eller gjenkalling) fra langtidsminnet (Vavik, 1999).

Arbeidsminnet består, i følge Baddeleys (sitert i Throndsen, 2005, s. 39), av tre separate komponenter; den *sentrale styringsenheten*, den *fonologiske sløyfen* og den *visuospatiale skisseblokken*. Disse tre komponentene aktiviseres i forbindelse med lærings- eller problemløsingssituasjoner. Styringsenheten sørger blant annet for valg av strategier og fremhenting av kunnskap. Den fonologiske sløyfen fungerer som et lager som bearbeider auditive inntrykk sekvensielt. Informasjonen fastholdes i det fonologiske lageret kun få sekunder dersom det ikke skjer en forsterkning i form av subvokale repetisjoner. Den fonologiske sløyfen er viktig i forbindelse med å fastholde midlertidig informasjon i forbindelse med problemløsing.

Kvaliteten på læringsprosessen hos den enkelte elev avhenger av hvor godt styringsenheten fungerer. Det er denne som er sterkest involvert i regneaktiviteter, fordi den har ansvar for både overvåking, koordinering og fremhenting av kunnskap. Svikt i den sentrale styringsenheten kan bidra til å forklare de matematikksvake elevenes strategibruk (Throndsen, 2005). Nettopp fordi måten vi tenker at den sentrale styringsenheten fungerer på, kan sammenliknes med det vi omtaler som metakognisjon.

## 2.2 Utviklingspsykologi

Utviklingspsykologi er læren om menneskets psykiske utvikling fra unnfangelse til død (wikipedia). Utvikling er varige forandringer som skjer i faser. Faktorer som styrer utviklingen er biologiske, psykologiske, sosiale og kulturelle. Utviklingspsykologien inneholder en rekke teorier og to viktige bidragsytere er Vygotsky og Piaget.

Vygotsky utarbeidet en ny læringsteori der læring ble sett på som en sosial prosess og hvor språket fikk en viktig rolle. Han mente at når mennesker arbeider sammen, får de til mer enn når de jobber alene. Han var opptatt av de menneskelige funksjoner i motsetning til de rent naturgitte eller biologiske som Piaget var opptatt av. Han betraktet psykologi som en metode for å avdekke opprinnelsen til høyere former for menneskelig bevissthet og følelsesliv mer enn elementære adferdshandlinger (Ostad, 2004).

Vygotsky benyttet begrepet ”bevissthet” i sitt forskningsprogram. Han antydet at sosialt meningsfylt samvær kan være det som frembringer bevissthet. At individuell bevissthet bygges ut fra relasjoner med andre og videre at høyere mentale funksjoner hos mennesket ses som resultatet av dette (Bråten, 1996).

Han opprettet et skille mellom *lavere naturlige mentale funksjoner (biologiske)*, som elementær sansning, erindring, oppmerksomhet og vilje og de *høyere mentale funksjoner (historiske)* som språk, skriving, telling, tegning, logisk hukommelse, beslutning, tenkning og begrepsdanning. Konstruksjonen av de høyere funksjoner dannes i mellommenneskelige forbindelser – vi formes i sosial omgang med andre mennesker. Vi ser en utvikling først på det sosiale plan og senere på det individuelle plan. Psykologiske verktøy, som språket, retter seg innover og omdanner menneskets naturlige evner og ferdigheter til høyere mentale funksjoner. Dette kalles internalisering. Gjennom internaliseringsprosessen dannes bevisstheten. Med denne teorien skapte Vygotsky en forbindelse mellom den kognitive utvikling og den sosiale og kulturelle utviklingen (Bråten, 1996).

Skillet mellom lavere - og høyere mentale funksjoner, to grunnleggende former for erfaring, ga opphav til to forskjellige, men gjensidig beslektede begrepsgrupper: den ”vitenskapelige” og den ”spontane”. Vitenskapelige begreper oppstår i den strukturerte virksomheten ved klasseundervisningen og gir et barn logisk definerte begreper. Spontane begreper oppstår gjennom barnets egen refleksjon over hverdagserfaringer. Disse to nærmer seg hverandre i det de vitenskapelige definisjoner utvikler seg ”nedover” i retning av konkrethet mens de spontane begrepene arbeider seg ”oppover” i retning større abstraksjon. I hvilken grad et barn er i stand til å assimilere de logiske begrepene avhenger av de ”lavere” spontane begrepene det bringer med seg. Den spontane læringen ble oppfattet som en hindring på veien til begrepsdannelse. Undersøkelser av begrepsdannelsen i undervisningssituasjoner ledet Vygotsky til en annen innsikt, nemlig dialogens betydning. Han hevdet at den fremgangen i begrepsdannelsen som et barn oppnådde i samarbeid med en voksen, ville være et godt mål på et barns intellektuelle evner (Bråten, 1996).

Et av de sentrale uttrykkene i Vygotskys teori er den proksimale utviklingssonen, som har blitt oversatt til ”barnets vekstsone” eller ”den nærmeste utviklingssone” (Bråten, 1996). Utviklingssonen peker mot den typen ferdigheter som ligger innenfor en persons rekkevidde, og som en er på vei mot. Den proksimale utviklingssonen bestemmes av: 1) det aktuelle utviklingsnivået, og 2) det potensielle utviklingsnivået. Det aktuelle utviklingsnivået er det nivået eleven befinner seg på innenfor et bestemt område når eleven skal løse oppgaven selv (etablert kunnskap). Mens det potensielle utviklingsnivået representerer det eleven kan klare å oppnå med hjelp fra en som er kommet lenger i utviklingen enn eleven selv (for eksempel lærer eller medelev). Det vil si det nivået en elev er på vei mot og har mulighet til å klare. Den proksimale utviklingssonen blir definert som avstanden mellom disse to nivåene. Der ”møter” de uorganiserte spontane begrepene de voksnes logiske begreper. Svakheten i de spontane begrepene kompenseres av styrken i den vitenskapelige logikken. Den nærmeste utviklingssonens dybde gjenspeiler barnets evne til å tilegne seg de voksnes struktur.

Vygotsky mente at alle har et potensiale til å utvikle seg videre og at det er gjennom samhandling med andre at det skapes utvikling på det individuelle plan. Det er språket som representerer byggestenen for tenkning. Vygotsky hevdet at språket er viktig for utvikling av tanken. Han mente at forståelsen utvikles fra språklig aktivitet til indre tankevirksomhet. Det vil si jo mer vi diskuterer løsninger på matematiske problemer, desto bedre resultat får vi. Denne tankegangen er vesentlig innen problemløsing (Schoenfeld, 1994). Klassediskusjoner kan bidra til å støtte opp under elevenes kunnskapskonstruksjon. En tenker seg da at samtalen som finner sted etter hvert vil kunne fungere som elevens selvstendige tenkning eller indre stemme. Den ytre private tale er blitt internalisert til en indre stemme. Gjennom diskusjonen gis elevene anledning til å verbalisere egne tankeprosesser og på den måten blir de seg mer bevisst sin egen tenkning. Dessuten er det sannsynlig at aktivitet og språklig engasjement styrker motivasjonen for faget.

Vygotskys teori bygger på tanken om at ethvert individ utvikler en indre tale som danner grunnlag for individets tenkning. Høytsnakking går over til indre tale som igjen går over til tenkning. En hensiktsmessig utvikling innebærer en utvikling henimot økt selvregulering, dvs kontroll og mestring av egne kognitive prosesser. Noe som i dag omtales som metakognisjon. Vygotskys utviklingsteori er da også svært aktuell innenfor moderne metakognitiv forskning (Throndsen, 2005).

### 2.2.1 Konstruktivismen

| |
|---|
| *"Jeg hører og jeg glemmer. Jeg ser og jeg husker. Jeg gjør og jeg forstår."* |

(Buddhistisk ordtak)

Konstruktivisme er et begrep knyttet til et syn på læring. All læring er en aktiv prosess der den som lærer selv må bygge opp eller konstruere sin egen kunnskap (Piaget, 1970). Man må bygge på elevenes erfaringer og deres kunnskaper. Enhver læring må starte der elevene befinner seg. Enhver konstruksjon av ny kunnskap skjer ved endring eller forkasting av den som allerede finnes. Det er dette Piaget kaller akkomodasjon og assimilasjon.

I følge Piaget's teori er kognitiv utvikling basert på menneskets søken etter mening gjennom logiske tilpasninger til omverdenen. Piaget (1970) forklarte dette med at vi lagrer kunnskapen vår i indre strukturer, såkalte skjemaer. Flere beslektede skjemaer danner en kognitiv struktur. Ny kunnskap forsøkes tilpasset allerede eksisterende kunnskap. Når ny kunnskap er forenelig med det vi allerede vet, det vil si passer inn i våre allerede eksisterende skjema – kalles det assimilasjon. Vi tilpasser nye erfaringer til allerede eksisterende kunnskapsstruktur (skjema) på en måte som ikke forandrer selve strukturen. Akkomodasjon skjer når ny kunnskap ikke passer inn i eksisterende skjema. Når nye erfaringer betraktes som uforenlige med de eksisterende strukturene (ikke kan forstås ut fra det vi vet fra før), får vi "kognitiv dissonans", en konflikt som skaper en drivkraft til å fornye de eksisterende strukturene. Tidligere kunnskap og erfaringer blir dermed omorganisert for at den nye kunnskapen skal kunne assimileres. Denne prosessen kalles adapsjonsprosessen.

Reflektiv abstraksjon er konstruksjonen av mentale objekter og mentale prosesser utført på disse (Harel, 1992). Et skjema er en samling av objekter og prosesser som "hører sammen". Det vil dermed konstrueres skjemaer som tilhører ulike temaer innen matematikken, som for eksempel funksjoner. Alle disse skjemaene må være sammenknyttet. Matematisk kunnskap består av en samling av skjemaer (se figur 1). En elevs kunnskap er dens evne til å fremkalle riktig skjema til enhver problemsituasjon. Vi trenger skjemaer for å løse oppgaver effektivt, men dette forutsetter gode relasjoner mellom skjemaene. Når ny kunnskap ikke passer inn i eksisterende struktur må akkomodasjon til. Dette er den konstruktive delen av reflektiv abstraktsjon. Det er viktig at man ikke ser på et skjema som noe statisk. Et skjema er i stadig forandring ettersom vår kunnskapsbase endres. Teorien om reflektiv abstraksjon er supplerende til teorien om epistemologiske hinder (2.8). Elevene har ulik type kunnskap og misoppfatninger er en måte å forstå noe på (Sierpinska, 1994).

#### 2.2.1.1 Diagnostisk undervisning

Diagnostisk undervisning bygger på teorien om konstruktivisme. Gjennom diagnostiske oppgaver identifiseres misoppfatningen. Dette danner så grunnlag for å tilrettelegge undervisningen slik at misoppfatningen blir fremhevet. Eleven får på den måten mulighet til å korrigere sin kunnskap slik at han overvinner sine misoppfatninger.

Ved Shell Center i Nottingham (Swan, 1985) har de arbeidet mye med misoppfatninger i matematikk. De har utviklet metoder, tester og annet materiell. Erfaringer viser at det kan være vanskelig å bli kvitt en misoppfatning. At lærer gjentatte ganger forklarer og gjennomgår samme stoffet når ikke inn hos eleven. Lærerens forklaringer klarer ikke å utslette grunnleggende oppfatninger hos eleven. Eleven må selv erfare og innse at de forestillinger og begreper som er dannet, ikke holder. Det er her konfliktorientert undervisning har vist seg å være effektivt. Misoppfatningene blir provosert frem gjennom oppgaver som blir gitt. Konflikten blir initiert ved at elevene løser oppgavene i fellesskap. Diskusjon og refleksjon rundt motsetningene i konflikten, skal være med å oppklare misoppfatningen og eleven vil gjøre nye erfaringer som danner grunnlag for å utvide og korrigere eksisterende begreper. Eleven utvikler sine eksisterende løsningsstrategier gjennom diskusjon med medelever og lærer.

## 2.3 Hvordan bygge opp forståelse av funksjonsbegrepet?

I skolens matematikkundervisning står læring av matematiske begreper sentralt. Et begrep kan i denne sammenheng oppfattes både som en operasjon og en struktur. Vanligvis vil et matematisk begrep først oppfattes som en operasjon av elevene og siden etter lengre tids bruk som en struktur (Bråthen, 2006). Denne prosessen kalles *reifikasjon*, noe som innebærer å kunne se noe velkjent på en ny måte.

Anna Sfard (1992) har kommet frem til teorien om objekter og prosesser. Denne teorien bygger videre på Piaget sin teori om reflektiv abstraksjon. Anna Sfard mener at alle matematiske begreper har to sider; operasjonell og strukturell. Hun påstår at mye av problemene rundt forståelse av begrepet funksjoner ligger i antagelsene om at de matematiske begrepene er statiske konstruksjoner og at vi ikke vier nok oppmerksomhet rundt de utførende prosesser. På den annen side så utfyller de to sidene hverandre. Et algebraisk uttrykk av en funksjon kan tolkes på to måter; operasjonelt som en detaljert beskrivelse av en prosedyre eller strukturelt som en graf. Hun argumenterer for at undervisningen innen temaet funksjoner må legge vekt på begge aspektene, men at rekkefølgen er vesentlig; operasjonell før strukturell. Veien fra utførende operasjoner til abstrakte objekter er en lang og vanskelig prosess utført i 3 steg: *interiorization*, *condensation* og *reification* (Sfard, 1992, s. 64).

*Interiorizarion*: Drill av enkle prosedyrer. Eleven klarer å løse matematiske oppgaver på egenhånd etter en detaljert oppskrift.

*Condensation*: Eleven er mer selvgående, oppskriften er forenklet og eleven trenger ikke gå ned i detaljene. Han klarer å kombinere ulike prosesser, gjøre sammenlikninger og generalisere. Eleven kan utforske funksjoner og tegne grafer. Fasen varer så lenge som den nye enheten er tett knyttet opp mot en bestemt prosess (prosessorientert).

*Reification*: Et ontologisk skift som kan forklares med at eleven plutselig ser noe kjent i et helt nytt lys. I motsetning til *interiorization* og *condensation* som foregår gradvis, skjer *reification* i et stort sprang. Prosessen går over til å bli en statisk struktur, et objekt. Ikke alle elever kommer så langt som til *reification ("tingliggjøring")*.

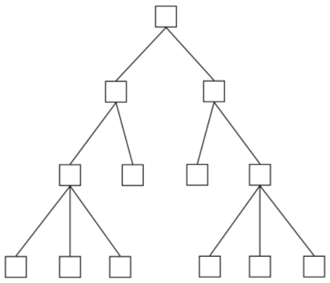
Handlingene og objektene utfyller hverandre gjensidig og er avhengig av hverandre. Når vi jobber med funksjoner, er vi avhengig av å ha erfaringer i å gjøre operasjoner med abstrakte objekter som for eksempel tall. Hvis ikke en person oppfatter tallene som objekter, vil personen ha vansker med å lære seg funksjonsbegrepet. Å "se" usynlige objekter, er viktig for å nå et abstrakt nivå, som igjen er en forutsetning for å oppnå gode kunnskaper i matematikk (Sfard, 1992). Forutsetningen for å nå et abstrakt nivå er at eleven har nådd det formelt-operasjonelle stadiet (Piaget, 1970). I det *formelt-operasjonelle stadiet* er eleven i stand til å tenke logisk om abstrakte situasjoner. Elever som ikke har nådd dette stadiet, vil ha problemer med å se sammenhenger mellom virkelige hendelser og abstrakte uttrykk; fra situasjon til graf eller algebraisk uttrykk (Høines, 1998).

Pionér-arbeidet innen feltet er gjort av Piaget som skrev følgende i sin bok om genetisk epistemologi: ”The mathematical abstraction is drawn not from the object that is acted upon, but from the action itself. It seems to me that this is the basis of logical and mathematical abstraction” (Piaget, 1970).

Piaget skiller mellom to stadier av tanken; *figurativ* og *operativ* tanke. Den figurative tankevirksomhet har mye til felles med den strukturelle, og den operative tankevirksomhet med den operasjonelle. Dette er kjernen i Piaget sin teori om *reflektiv* abstraksjon (Høines, 1998). Til forskjell er Anna Sfard opptatt av den gjensidige sammenhengen (dualitet) som er mellom operasjonell og strukturell tilstand. Et symbol kan være både strukturelt og operasjonelt, avhengig av kontekst. Vi må kunne se en funksjon både som et objekt og som en prosess for å oppnå en solid matematisk forståelse av begrepet.

Eksempel på dualitet er det algebraiske uttrykket $y=3x^2 +1$ som kan sees på som et objekt (strukturell), det vil si som en statisk relasjon mellom to variable størrelser og den kan bli behandlet som en prosess (operasjonell) hvor vi utfører beregninger. Tegner vi grafen til denne funksjonen får vi en strukturell representasjon.

For å oppnå meningsfull læring, må vi ha abstrakte, statiske objekter å knytte prosesser mot. Til et bestemt objekt er det definert et sett lovlige operasjoner. Dersom de mentale skjemaene skal kunne knyttes sammen med sterke relasjoner, må vi ha strukturell kunnskap, det vil si kjenne til objekter. Det er nettopp dette som skjer når eleven når reifikasjonsnivået. Det dannes flere lag i den hierarkiske strukturen av de kognitive (mentale) skjemaene. Jo flere lag vi har i hierarkiet, jo større kapasitet har dette skjemaet (se figur 1). Læringen blir mer effektiv og meningsfull. Retrievalprosessen (fremhentingsstrategien) blir mer effektiv. Eleven vil oppleve økt evne til problemløsing og vil komme lenger i læringsprosessen ved at ressurser frigjøres i arbeidsminnet (Sfard, 1992).



**Figur 1**. Meningsfylte relasjoner. Eleven vil raskere finne frem til den informasjonen han trenger når det mentale skjemaet er godt strukturert. Hvor mange informasjonsenheter vi kan arbeide med om gangen, er sterkt begrenset. Det magiske nummeret er 7 pluss/minus 2 noder på hvert nivå (Miller, 1956 i Throndsen , 2005). Dette fordi det er den maksimale mengden som vårt arbeidsminne klarer å håndtere på en gang. Ved effektiv omkoding, kan man øke informasjonsinnholdet i hver enhet. Dette kan oppnås ved at eleven klarer å knytte ny kunnskap opp gammel. Elevens metakognitive kunnskap påvirker i stor grad denne prosessen.

Man må kunne utføre algoritmer med svært god forståelse før *reification* inntrer; før man får en forståelse av selve objektet. Samtidig må man kjenne til objektet man utfører algoritmen på for å få utbytte av prosessen. Begge deler bør være til stede og dualiteten er sterk, begrepene er komplementære. Det er dualitet mellom det algoritmiske og det strukturelle, mellom handling og forståelse (Sfard, 1992).

Dualiteten når det gjelder prosess-objekt, beskrives på mange ulike måter i den didaktiske litteraturen. Videre er teorier om sammenfatninger av prosesser til objekter og teorier om ulike representasjonsformer for funksjoner blitt sett på under ett for å danne et mer helhetlig syn på hvordan den kognitive utviklingen under læring av funksjonsbegrepet foregår (Tall, 1991).

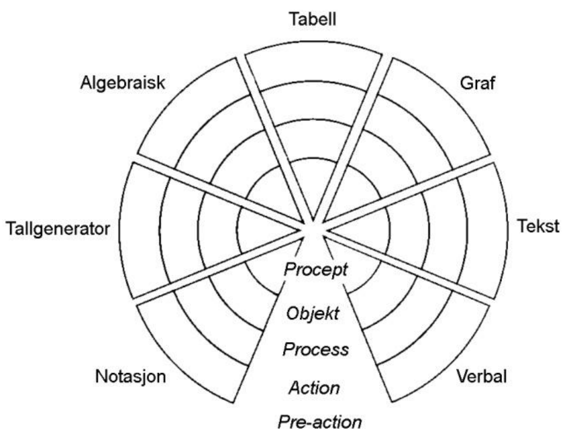
### 2.3.1 Ulike grader av forståelse

Phil DeMarois og David Tall (1996) har innført et videre perspektiv på teorien om prosess-objekt gjennom sin modell med ”facet and layers” (se figur 2). Teorien har en konstruktivistisk tilnærming. Hovedpoenget innen matematikken, mener de, er å hjelpe studentene til å konstruere skjemaer slik at de får forståelse av begreper. De refererer til graden av forståelse som *bredde og dybde.* Når modellen her benyttes til å beskrive kognitiv utvikling innen funksjonsbegrepet, refererer *bredde* til i hvor stor grad elevene behersker de ulike representasjonsformene til funksjoner og *dybde* til hvor langt eleven har kommet i utviklingen mot reification (Sfard, 1992). Jo dypere man beveger seg dess høyere grad av kognitiv abstraksjon. Dette kan brukes til å systematisere elevens forståelse av funksjoner.

Ordet *fasett* benyttes for å utdype hva som legges i begrepet *bredde*. Fasett i forbindelse med begrepet funksjoner inkluderer da alle mulige måter å representere en funksjon på, som for eksempel graf, tabell og symbolsk uttrykk. Flere av disse fasettene har under-fasetter. Det er for eksempel flere måter å representere en funksjon symbolsk slik som $f(x)= x+1$ og $f: x \rightarrow x+1$.

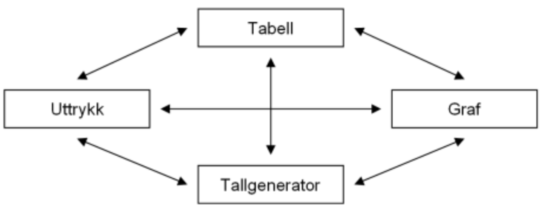
De ulike gradene av kognitiv forståelse (*dybde*) betegnes som *lag*. Dette svarer til operasjon-prosess-objekt, hvor mentale operasjoner på objekter blir til gjentatte prosesser som igjen samles og danner nye objekter.

De elevene som enkelt og fleksibelt forflytter seg mellom prosess og objekt lagene etter behov har nådd ”procept”-laget. *Procept* er en sammensmelting av begrepene *process* og *concept.* Som på norsk ville tilsvare ”progrep” (Niss, 2003). Elevene som befinner seg på dette nivået, velger raskt og fleksibelt den best egnede representasjonsformen til ethvert problem.




**Figur 2.** Modellen kan sees på som en pivot, som kan være til hjelp for å systematisere observasjoner (DeMarios & Tall, 1996).

De ulike *fasettene* er: tabell, graf, algebraisk uttrykk, skriftlig beskrivelse (tekst), muntlig beskrivelse (verbal), notasjon og tallgenerator. Disse er representert som sektorer i sirkelen. Bevegelse i retning sentrum av sirkelen visualiserer kognitiv utvikling. Ytterst finner vi pre-prosedyre-laget som er det laveste kognitive nivået. Elever som befinner seg her har ikke nådd prosedyre nivået. Elever som befinner seg på prosedyre-nivået kan trinnvis og med høy detaljeringsgrad utføre prosedyrer. Når en prosedyre er internalisert, det vil si når interne konstruksjoner knyttet opp til prosedyren er opprettet, er prosedyren blitt en prosess (*reflektiv abstraksjon*). Vi sier da at prosedyren er automatisert. Elever som er på prosess-nivået trenger ikke lenger kjenne til detaljene i prosedyrene, de klarer å generalisere og overføre betydningen til andre områder. På Objekt-nivået har elevene evne til abstrakt tenkning. Elever som har nådd procept-laget har evne til å bevege seg mellom de ulike lagene, mellom prosess og objekt ettersom det er mest hensiktsmessig, samtidig som de fleksibelt beveger seg mellom de ulike representasjonsformene til funksjoner (bredde).




**Figur 3**. Mulige relasjon mellom ulike representasjonsformer (*fasetter)* (DeMarios & Tall, 2004).

De elevene som ikke klarer å se sammenhengen mellom de ulike representasjonsformene, og som har lite hensiktsmessig organisering (svake relasjoner) mellom de mentale skjemaene, vil ikke klare å komme dypere; fra prosedyre-prosess-objekt til procept. Elevene kan ha gode kunnskaper på spesifikke områder, men når de ikke klarer å se sammenhenger, kan dette skape misoppfatninger. Løsningen kan være konfliktorientert undervisning som fører til at eleven ser at ny kunnskap ikke passer inn i de gamle skjemaene (tidligere ervervet kunnskap) og dermed må reorganisere sine mentale skjemaer (*akkomodasjon*).

Gjennom sin forskning påstår DeMarios og Tall at ved å ta i bruk funksjoner i undervisningen av blant annet algebra, så kan man oppnå bedre matematisk forståelse hos elevene. abc-formelen kan vises grafisk ved å finne nullpunkter til grafen. Ulikheter og likninger kan også løses grafisk.

### 2.3.2 Kan bruk av digitale verktøy føre til økt læring?

Kalkulator og pc gir mulighet for oppgaver og arbeidsmetoder som tidligere ikke var mulig og gir tilsvarende ny innfallsvinkel til stoffet. Eleven blir ikke instruert og fortalt, men må selv oppdage. På denne måten vil elevene få variasjon i undervisningen, noe som igjen kan virke motiverende. Kalkulatoren gir elevene enkel tilgang til å omforme fra en representasjonsform til en annen. Fokus flyttes fra beregninger og plotting av punkter (operasjonelt) til et høyere nivå (strukturelt). Et program på Pc'en kan enkelt illustrere hvordan en endring i et funksjonsuttrykk påvirker grafens utseende. Det blir enklere å kunne se sammenhenger mellom ulike funksjoner og sammenheng mellom det algebraiske uttrykket for en funksjon og funksjonens grafisk representasjon. Men det viser seg dessverre at bruk av pc og kalkulator også kan skape misoppfatninger (Goldenberg, sitert i Romberg, 1993).

Tall (1991) stiller spørsmål om bruk av programvare på pc og kalkulator kan hjelpe eleven å danne mentale objekter og skjemaer? Programkoden er skjult slik at programmet kan behandles som en slags "input-output-boks". Programvaren på pc eller kalkulator utfører operasjoner slik at eleven kan fokusere på resultatet i stedet for detaljene i prosessen. Fokus flyttes oppover i betydning høyere abstrakt nivå, fra prosess til objekt. Ved å ta i bruk slik programvare, kan eleven velge om han vil konsentrere seg om selve prosessen eller høyere relasjoner. Dermed kan eleven danne objekter uten å gå veien om å internalisere prosedyrene først.

## 2.4 Læringsstrategier

Kvaliteten på elevenes matematikkunnskaper er blant annet en funksjon av de læringsstrategiene som anvendes (Ostad, 2006).

Interessen for hvordan elever lærer har ført til studier av hvilke læringsstrategier elever benytter i forbindelse med tilegnelse av lærestoff i matematikk (Smith & Rivera, 1991, sitert i Throndsen, 2005).

Strategier kan defineres som motiverte, viljestyrte, målrettede prosesser eller handlinger som i utgangspunktet blir anvendt på en bevisst måte (Elstad og Turmo, 2006). Strategier involverer valg mellom flere alternative løsningsmåter. Valg av strategi påvirker kvaliteten på de matematikkunnskapene elevene tilegner seg. En mangelfull strategikunnskap og ineffektiv strategibruk, vil kunne føre til mangelfulle matematikkunnskaper. Den opplæringen barn og unge får i strategibruk er dermed vesentlig for utviklingen av matematikkunnskaper hos den enkelte (Ostad, 2004**)**. Ferdighetstrening, refleksjon og kontroll av egen læring kan med en fellesbetegnelse kalles læringsstrategier (Grønmo og Throndsen, 2006).

Gode matematikkprestasjoner er avhengig både av riktig strategivalg og en velutviklet kunnskapsbase. Kunnskap i seg selv er ikke nok, strukturen i basen er like viktig. At kunnskapen er organisert på en fornuftig måte. Dersom kunnskapen ikke er organisert som en helhet, som et nettverk med sterke relasjoner, kan man tenke på kunnskapen som isolerte informasjonsenheter. Dette vil medføre at eleven nærmer seg ethvert problem som om det var et nytt problem. Eleven vil ikke oppdage mønstre og fellestrekk ved oppgaver og dermed ikke kunne gjenbruke informasjon. De oppnår lite effektivitet i oppgaveløsingen (Throndsen, 2005).

### 2.4.1 Generelle og oppgavespesifikke strategier

Strategitermen bygger på *generelle strategier* og *oppgavespesifikke strategier* (Goldman, 1989; sitert i Ostad, 2006). G*enerelle kognitive strategier* har et bredt anvendelsesområde. De omtales også som metakognitive strategier, som rettes mot matematikkopplæringen, mot de metodiske oppleggene som anvendes i undervisningen og mot lærebøkene. *Oppgavespesifikke strategier* refererer til de alternative fremgangsmåtene elevene tar i bruk i oppgaveløsingen. Hvilke algoritmer elevene velger for å løse bestemte oppgaver. Dette omtales som retrieval- og backup-strategier (Ostad, 2006). *Retrieval-strategier* (direkte fremhentingsstrategier) benyttes av elever som kjenner igjen en oppgave som blir gitt. Svaret ligger lett tilgjengelig i et fleksibelt kunnskapslager og kan raskt hentes frem som en meningsbærende enhet. *Backup-strategier* benyttes av elever som ikke finner noen mening i oppgaven. De finner en algoritme som de tror de kan bruke til å løse oppgaven. Backup-strategier anvendes også i de tilfellene hvor retrieval-strategien ikke kan brukes med tilstrekkelig grad av sikkerhet. For eksempel når oppgaven er såpass krevende at bruk av direkte fremhenting vil kunne føre til ukorrekt svar. I følge Siegler (1990) dreier valget mellom direkte fremhenting og backup-strategier seg om en slags balanse mellom hensynet til hurtighet og nøyaktighet.

Elevenes ulike framgangsmåter under oppgaveløsing bærer preg av deres grunnleggende kunnskap i matematikk. Noen benytter retrievalstrategier andre backup-strategier. En velorganisert kunnskapsbase gjør det mulig å løse en oppgave ved hjelp av direkte fremhenting fra langtidsminnet og viktige mentale ressurser frigjøres da til bearbeiding og lagring av ny kunnskap i stedet for å bruke tid på back-up strategier og komplekse resonneringsprosesser. Studier viser at elever som lykkes i matematikk benytter strategier på en fleksibel måte, mens hos elever med svake prestasjoner er oppgaveløsingen dominert av backup-strategier, mens fremhentingsstrategier er nærmest fraværende (Throndsen, 2005, s. 45).

Strategier betraktes som prosesser som har sin forankring i kognitive strukturer, og forskning viser at effektiv strategibruk er avhengig av en velorganisert kunnskapsbase (Throndsen, 2005). Matematikksvake elever har lite hensiktsmessig lagringsstruktur i langtidsminnet og dermed vansker med tilgangen til denne kunnskapen (Ostad, 2004). Både lagring og fremhenting av lærestoff fra langtidsminnet er kognitive prosesser som stiller krav til personens arbeidsminne. Under lærings- eller problemløsingssituasjoner aktiviseres arbeidsminnet i forbindelse med korttidslagring og manipulering av informasjon. Den sentrale styringsenheten styrer oppmerksomheten, initierer og kontrollerer mentale prosesser, foretar avgjørelser og henter frem informasjon fra langtidsminnet. Styringsenheten sørger også for valg av strategier. Elever med matematikkvansker bruker mer av arbeidsminnet til å utføre regneoperasjoner og det blir derfor mindre kapasitet igjen til andre kognitive prosesser, som for eksempel lagring av informasjon (Throndsen, 2005). Undervisning som vektlegger kunnskap om når, hvor og hvorfor spesifikke strategier kan være nyttige, kan ha en positiv effekt på elevenes strategibruk og deres faglige prestasjoner.

### 2.4.2 Hvordan utvikle gode læringsstrategier

I sin bok om læringsstrategier har Eyvind Elstad og Are Turmo fokus på hvordan elever lærer. Læringsstrategibegrepet innebærer at eleven framstår som en aktiv part i egen læringsprosess i den hensikt å oppnå læring med forståelse. ”Å utvikle gode læringsstrategier handler om hvordan elever på en aktiv, fleksibel og effektiv måte kan tilnærme seg ulike typer læringssituasjoner og ulike typer lærestoff” (Elstad og Turmo, 2006, s. 11).

I sin bok kategoriserer de læringsstrategier på følgende måte:

Hukommelsesstrategier (repetisjonsstrategier)
Utdypingsstrategier
Organiseringsstrategier
Forståelsesovervåking og kontroll

Dersom hensikten med en oppgaven er å huske enkeltoperasjoner og enkle fakta, så kan det å beherske *hukommelsesstrategier* være nyttig. Vi kan bruke ulike teknikker for å huske blant annet multiplikasjonstabellen eller beregne tallpar til et funksjonsuttrykk. Eleven befinner seg da på interiorization-stadiet og utvikler operasjonell kunnskap (Sfard, 1992). Eleven lærer ikke å se sammenhenger (tabell-graf-funksjonsuttrykk). Det å kunne gangetabellen eller å beregne tallpar gir ikke noen matematisk innsikt eller ferdighet i seg selv, men det legger et grunnlag for resonnering (Sfard, 1992). Uten å kunne en del fakta og grunnleggende ferdigheter klarer vi ikke å løse mer kompliserte oppgaver. For å kunne løse mer kompliserte oppgaver, må vi kunne bruke våre resoneringsferdigheter. Hukommelsesstrategier bør derfor kombineres med andre læringsstrategier, slik at strategiene kan utfylle hverandre.

*Utdyping* innebærer at eleven konstruerer relasjoner mellom noe vedkommende kan fra før og det som skal læres (assimilasjon), samt utvider allerede eksisterende kunnskap (akkomodasjon). Hos noen elever skjer dette spontant, mens andre trenger hjelp. Læreren kan hjelpe eleven til å se sammenhenger ved å stille utdypende spørsmål som: ”Minner dette deg om noe du har lært før? Ser du et kjent mønster i dette?”. Når læreren tar i bruk denne strategien i sin undervisning, er det med på å utvikle elevens strategivalg i læringssituasjonen (Elstad og Turmo, 2006, s. 18).

Videre må kunnskapen *organiseres* i vårt mentale system for at vi skal være i stand til å gjenkalle kunnskapen i passende situasjoner (strukturell kunnskap).

Det er viktig å kombinere flere læringsstrategier. *Utdyping og organisering* er strategier som er viktige for at eleven skal oppfatte likheten mellom ulike kunnskapsområder og kunne overføre kunnskap mellom ulike fremstillingsformer. Innen funksjonslære kan dette være tabell, algebraisk uttrykk, fenomen i virkeligheten eller å tolke en graf. Resultatet avhenger av elevenes evne til å resonere analogisk. Det vil si hvor god han er til å overføre sammenhenger innen et kunnskapsområde til et annet for å forsøke å forklare og finne mening (Elstad og Turmo, 2006). Problemet er bare at de slutningene en elev gjør, kan gi mening innenfor et område men samtidig skape misoppfatninger innen et annet, som at høyest på grafen er ensbetydende med ”vokser raskest”.

Med *forståelsesovervåking* menes det at eleven selv må tenke igjennom hvor godt han har forstått det stoffet som er gjennomgått. Eleven reflekterer over egen forståelsesprosess (Elstad og Turmo, 2006).  Å overvåke egen forståelse er en form for metakognisjon. Eleven tilegner seg kunnskap om hvordan han selv tenker og lærer. *Kontroll* har flere betydninger. Kontroll av konkrete regneoperasjoner eller kontroll av motivasjon for å lære. Det er lettere for eleven å arbeide målbevisst dersom han kan se på innlæringen som et ledd i en prosess mot å nå et bestemt mål: ”Jeg må være god i matte for å kunne komme inn på et bestemt studium”.

Det er lite sannsynlig at en elev vil anvende passende strategier på en fleksibel måte, dersom han ikke selv har oversikt over hvilke ulike strategier han behersker. Denne fleksibiliteten er avhengig av metakognitiv kompetanse, elevens kunnskap og kontroll av egen læring.

## 2.5 Metakognisjon

Metakognisjon refererer til en persons kunnskap om egne kognitive prosesser og produkter og alt som henger sammen med disse prosessene og produktene (Flavell, sitert i Throndsen, 2005). Flavell får ofte æren av å være opphavsmannen til begrepet metakognisjon (Elstad og Turmo, 2006).

Med *metakognitiv kunnskap* tenker vi på elevens bevissthet om egen tenkning og om seg selv i ulike læringssituasjoner. Gjør eleven et bevisst valg av strategi? ”Er den strategien jeg har valgt den mest hensiktsmessige?” Kjenner eleven til egne sterke og svake sider? ”Å tegne graf ut fra algebraisk uttrykk er jeg god til, men å sette opp et algebraisk uttrykk ut fra tekst sliter jeg med.” *Metakognitiv kunnskap* sier noe om elevens kunnskap om hvilke fremgangsmåter og prosedyrer som egner seg til løsing av ulike problemer og oppgaver; det vil si kunnskap om læringsstrategier og refleksjon over egen tenkning. Som et samlebegrep kan metakognitiv bevissthet sies å omfatte ikke bare kunnskap om seg selv som lærende, men også kunnskap om faglige oppgaver og læringsstrategier (Bråten, 1991).

### 2.5.1 Ulike aspekter ved metakognisjon

Det opereres med to ulike aspekter ved metakognisjon. Metakognisjon refererer både til *kunnskap om* og *regulering* eller *kontroll* av kognisjon (Bråten, 1993). Kunnskap om egen kognisjon representerer *strukturaspektet*, mens regulering av egen kognisjon representerer *prosessaspektet*. Strukturaspektet representerer den kunnskap eleven har om seg selv i ulike situasjoner (personens opplevelse av seg selv som et lærende og tenkende individ). Prosessaspektet representerer den lærendes kunnskap om ulike fremgangsmåter for oppgaveløsing (strategier).

I matematikken er studier med fokus på metakognitive prosesser i første rekke rettet mot eldre elever. Årsaken til dette er trolig at evnen til å planlegge, handle i henhold til planen og overvåke arbeidet utvikles med alderen (Schoenfeld, 1992).

### 2.5.2 Prestasjoner i matematikk avhenger av metakognitive ferdigheter

Mange studier peker på hvor viktig det er å ha en solid kunnskapsbase for å kunne prestere godt i problemløsing. Samtidig viser det seg at det er ikke hva man kan, men hvordan, når og om man bruker det (Schoenfeld, 1992).

Den betydning reguleringsferdigheter har for problemløsing i matematikk er blant annet dokumentert i en studie av Schoenfeld (1992). Schoenfeld viser gjennom sine studier at elever som lykkes i matematikk aktivt overvåker og evaluerer sin strategibruk når de løser oppgaver. I dette studiet sammenliknet han hvilke metakognitive aktiviteter som kjennetegnet godt presterende elever i matematikk med svakt presterende elever. De sterke elevene tok seg god tid til å analysere oppgaven for å sikre seg at de hadde forstått problemet. Deretter planla de løsningsprosessen og iverksatte planen. Selve problemløsningen ble overvåket og evaluert underveis. Til slutt evaluerte de om svaret ga mening og virket fornuftig. Som et resultat av god planlegging, overvåkning og evaluering, gjennomførte de sterke elevene selve løsningsprosessen raskt og nøyaktig. De svake elevene derimot unnlot å overvåke egen forståelse og evaluere fremgangen i problemløsingen. Etter å ha lest oppgaven valgte de raskt en tilnærmingsmetode. Fordi de lot være å analysere oppgaven, ble de valgte tilnærmingsmetodene sjelden de mest hensiktsmessige. Til tross for at framgang uteble, lot de være å vurdere andre alternativer og holdt seg til den valgte løsningsmetoden. De unnlot å sjekke om løsningen virket fornuftig og ga noen mening. Resultatet viser at selv om de svake elevene hadde tilstrekkelig kunnskap til å løse problemet, var de ikke i stand til å anvende kunnskapen på en konstruktiv måte fordi de manglet reguleringsferdighetene. Mesteparten av tiden gikk med til å anvende uhensiktsmessige strategier som sjelden førte frem. Schoenfeld viste gjennom dette studiet hvor viktig metakognitive ferdigheter er for prestasjoner i matematikk.

Schoenfeldt (1992) er opptatt av hvordan den gjensidige påvirkningen mellom kognitive og metakognitive prosesser påvirker problemløsingsprosessen. Han mener følgende komponenter har vesentlig betydning for prestasjon i faget: 1) kunnskapsbasen, 2)problemløsingsstrategier, 3) overvåking og 4) motivasjon. Med dette belyser han det faktum at elever som besitter tilstrekkelig matematikkunnskap, allikevel kan mislykkes i faget dersom de mangler ferdigheter i overvåking eller preges av lav motivasjon. Schoenfeld (1992) mener at matematikkundervisningen i for stor grad har fokusert på de to første komponentene og at problemer med overvåking og motivasjon ikke har fått nok oppmerksomhet.

## 2.6 Motivasjon

Schoenfeld (1994) hevder at metakognisjon og motivasjon ikke kan sees uavhengig av hverandre. Elevens motivasjon for en oppgave påvirker valg av strategi og således det metakognitive systemet.

Elevene trenger motivasjon for å løse en matematikkoppgave. Studier viser en klar sammenheng mellom elevenes tiltro til egen mestring og den innsats og engasjement som kommer til syne i læringssituasjonen. Forventning om mestring har vist seg å ha direkte effekt på den innsatsen elevene iverksetter i lærings- og oppgavesituasjonen (Collins, 1982, sitert i Elstad og Turmo, 2006, s. 190). Høye forventninger om å lykkes med en bestemt oppgave i tilegg til positiv vurdering av aktiviteten, vil føre til økt innsats og engasjement og valg av hensiktsmessige strategier. Elever med høye forventninger til egen mestring tar i bruk flere ulike læringsstrategier (Pintrich mfl. 1998; Wolters og Pintrich, 2001, sitert i Elstad og Turmo, 2006, s. 190). Dette forutsetter at lærerne gir oppgaver som den enkelte elev mestrer - tilpasset opplæring. Lærernes undervisning påvirker i stor grad elevenes interesse og motivasjon for faget som igjen påvirker valg av strategi.

## 2.7 Elevene - gode problemløsere?

Matematikken er levende og i stadig utvikling. Den består ikke bare av å pugge prosedyrer og formler. Matematikken består av å søke etter løsninger, forklare mønstre og formulere antagelser. I følge Schoenfeld (1992) består matematikkundervisningen svært ofte av at læreren presenterer eksempler og nye regler, slik at eleven kan benytte samme metoden til å løse et sett med oppgaver. Elevene venner seg til å bli servert metoder for å løse bestemte typer oppgaver og det forventes ikke at de selv skal søke etter metoder for å løse problemene. Elevene inntar en passiv rolle. Dette er en effektiv måte å komme gjennom mye nytt stoff på, mens problemløsingsarbeid tar tid.

”Elevene utvikler i svært liten grad metakognitiv kompetanse fordi undervisningen i hovedsak legger vekt på formidling av regler og prosedyrer og ikke forståelse. Dette er den viktigste årsaken til elevenes matematikkvansker" (Schoenfeld 1992, s. 361). Ved å jobbe med problemløsing, utvikler eleven metakognitiv kompetanse. Ekte problemløsing er å bli utfordret med nye og ukjente oppgaver hvor relevante løsningsmetoder er ukjente (Polya, 2004). Elevene lærer seg å ta i bruk ulike strategier og opplever at et problem kan ha mange løsningsmetoder. Problemløsing består i å prøve og feile og elevene må selv finne frem til relevant metode for å klare å løse problemet.

Tradisjonelt har "problemer" ofte blitt identifisert med matematiske oppgaver som skal utføres (Schoenfeld 1992, s. 337). Det innebærer at også (drill-)oppgaver som primært har til hensikt å gi trening i en spesiell teknikk, har blitt regnet som problemløsing. Det som kjennetegner problemløsing er at det skal være uklart for eleven hvilken løsningsmetode som skal brukes. Gjennom problemløsing utvikler eleven kreativ tenkning.

Matematisk modellering kan kanskje sees på som den mest fullstendige typen matematisk problemløsing. Utgangspunktet er et reelt problem som ikke oppfattes som matematikk. Det opprinnelige problemet matematiseres ved å omforme problemet til matematiske begreper og relasjoner mellom disse. Vi får da en matematisk modell av situasjonen. Deretter kan problemet løses ved hjelp av matematiske metoder og det matematiske resultatet man her får føres så tilbake til den opprinnelige konteksten. Til slutt må resultatet evalueres.

Elevene lærer mange metoder for å representere matematiske relasjoner, men det blir som regel brukt lite tid på tolkning av løsningene og refleksjon over hvilke ulike metoder som er best egnet i ulike sammenhenger. Under problemløsingsarbeidet derimot er det viktig at elevene kontinuerlig vurderer det arbeidet de gjør. "Har vi valgt riktig strategi/metode?" "Oppnår vi det vi ønsker?" "Kommer vi frem til en løsning på oppgaven?" Hvis svaret er nei, må de starte forfra igjen. Læreren kan bidra til oppklaring ved å stille spørsmål som: "Hva gjør du?" "Hvorfor gjør du det?" "På hvilken måte hjelper det deg?" Videre anbefaler Polya (2004) å se tilbake på det man har gjort, fordi dette er med på å utvikle evnen til løse nye problemer. Elevene kan på den måten oppdage nye og bedre løsninger og se nye sammenhenger.

Når elevene skal løse et problem er innholdet i og strukturen på kunnskapsbasen av stor betydning. Hvordan kunnskapen er lagret i kunnskapsbasen, er avgjørende for hvor tilgjengelig og lett det er å få tilgang til informasjonen. Arbeidsminnet har begrenset kapasitet og under problemløsing kreves det at man har mange ideer i hodet samtidig. Arbeidsminnet kan da bli en begrensning (Miller, 1956, sitert i Throndsen, 2005). I tillegg kan informasjonen inneholde feil. Dersom eleven har misoppfatninger, vil det være denne informasjonen han bringer med til problemløsingssituasjonen. Da vil også verktøyet eleven jobber videre med være galt.

### 2.8 Teorier om epistemologiske hindringer.

Begrepet kognitive -, kunnskapsteoretiske - eller intellektuelle hindringer kan være interessant å studere for å kunne identifisere problemer som eleven kan støte på i læringsprosessen. På den måten har man mulighet til å finne de best egnede strategier i undervisningen. Cornu (sitert i Tall, 1991, s. 158) skiller mellom flere typer hindringer: G*enetiske og psykologiske hindringer* som utvikles hos den enkelte elev. *Didaktiske hindringer* som forårsakes av mangelfull/utilstrekkelig undervisning og *epistemologiske hindringer* som har eksistert over tid og har sitt opphav i selve matematikken, i dens natur (begreper) og utvikling. *Epistemologiske hindringer* kan oppfattes som kunnskapsstrukturer som er mangelfulle.

Kvaliteten på den kunnskapen om funksjoner som utvikles hos den enkelte elev, påvirkes av lærerens oppfattelse av begrepet (*didaktiske hindringer)*. En lærers syn på hva en funksjon er vil nok i stor grad påvirke elevens syn på begrepet funksjoner. Mest sannsynlig vil det være en sammenheng mellom lærerens ide om begrepet og den strukturen og formen på undervisningen han velger, spørsmål som blir stilt og eksempler som blir vist. Elevenes begrepsbilder skapes ut fra de eksemplene som blir brukt for å illustrere og forskning viser at elevene har vansker med å løsrive seg fra den kontekst opplæringen skjer i (Niss, 2003).

#### 2.8.1 Kilder til misoppfatninger

Begrepet *epistemologiske hindringer* ble innført av den franske psykologen og filosofen Gaston Bachelard i 1936. I følge Bachelard er kunnskap ikke en mental tilstand, men en løsning på et problem. Epistemologiske hindringer blir derfor kilden til misoppfatninger som oppstår når individet forsøker å løse et problem. For han har epistemologiske hindringer to vesentlige karakteristiske egenskaper

- De er uunngåelige og er en viktig del av den kunnskapen eleven må tilegne seg
- De har oppstått, i hvert fall delvis, i løpet av den historiske utviklingen av matematikken

Guy Brousseau videreførte begrepet epistemologiske hinder til didaktikken. Brousseau hevdet med bakgrunn i forskningen til Bachelard og Piaget at feil ikke bare kan oppfattes som ignorering, usikkerhet, uflaks eller liknende. Han sier at slike feil bygger på tidligere kunnskap som nå viser seg å være feilaktig eller ufullstendig. Det som var veletablert og velfungerende kunnskap innen et bestemt område, fører til selvmotsigelser innen et annet. Det blir derfor nødvendig å reorganisere og utvide de kognitive strukturene. Dette må skje ved at eleven selv erkjenner at hans gamle kunnskap ikke holder og at rekonstruksjon må til. Feil av denne typen er ikke tilfeldige og uventede (Brousseau, sitert i Mosvold, 2001).

Schubring står for det samme synspunktet, og han hevder at feil ikke bare kan oppfattes som mangel på evner eller uoppmerksomhet, men at elevfeil er årsaksbestemte, og at de ofte også er svært systematiske (Schubring, sitert i Mosvold, 2001).

Anna Sierpinska har brukt teoriene for epistemologiske hindringer i sin forskning for å kunne gi et bedre bilde av elevers forståelse av matematikk. Hun ønsket å kartlegge elevenes forståelse. "Epistemologiske hindringer er ikke hindringer for den 'rette' eller 'korrekte' forståelsen; de er hindringer til en slags endring av tankens rammeverk" (Sierpinska, 1998). Anna Sierpinska har blant annet forsket på oppfatningen av funksjoner, noe jeg vil se litt nærmere på. Hun bruker den historiske utviklingen av funksjoner til å beskrive elevenes oppfatning av begrepet. Funksjoner utviklet seg fra geometriske objekter, vi fikk en konkret tilnærming til grafer. Dette er et av de hindrene som stadig eksisterer hos dagens elever og er et hinder mot abstrakt tenkning om begrepet.

### 2.8.2 Teori om forståelse

Sierpinska forklarer en misoppfatning som en måte å forstå noe på. Det å overvinne epistemologiske hindringer og det å forstå noe er to sider av samme sak. Hun påstår at den første er negativt ladet mens den andre er positivt ladet. Hva mener vi så med å forstå funksjoner? For å kunne svare på dette trenger vi teori om forståelse generelt og teori om forståelse av begrepet funksjoner spesielt (Sierpinska, 1992).

#### Generell forståelse

Matematisk kunnskap konstrueres ikke med jevn progresjon men i tilfeldige sprang. Viktige kvalitative endringer relatert til matematisk kunnskap i menneskets sinn, gjør et sprang fra gammel kunnskap til ny. Plutselig får vi en aha-opplevelse og ser nye sammenhenger og mønstre. Noen ganger vil gammel kunnskap virke som et hinder mot ny. Sierpinska ser på læring som det å komme over en hindring.

**Forståelse av begrepet funksjoner (spesielt)**

Hvordan beskrive et sprang innen kunnskapservervelse – fra gammel måte å forstå på til ny måte å forstå på. Anna Sierpinska (1992) beskriver to måter å forstå disse sprangene på. De er komplementære, dvs. delvis avhengige av hverandre og den ene vil ikke eksistere uten den andre. Begge er nødvendige for fullt ut å beskrive et sprang i forståelse.

1) Se bakover – Overvinne et hinder
   Når vi har tilegnet oss ny forståelse, vurderer vi vår tidligere forståelse og ser ting som hindret oss i å forstå på den nye måten. Vi ser tilbake på det som var feil eller ufullstendig i kunnskapen vår.
2) Se fremover – Forståelse
   Hvis vi i stedet for å dvele ved gamle feil, ser fremover på det som ligger foran oss tenderer vi til å beskrive trinnet i forståelse vi har oppnådd ut i fra vår nye forståelse.

### 2.8.3 Hvor kommer hindrene fra?

Sierpinska (1992) er opptatt av hvor de kunnskapsteoretiske hinder kommer fra. Hun skiller mellom 3 nivåer:

En er *eksplisitt kunnskap* som holdning, tro og forventninger. Den neste er *mentale skjemaer*. Hvordan angripe problemer og forklare situasjoner? Her bruker vi det vi har lært gjennom praksis og sosialt samvær med andre og gjennom vår utdannelse. Det tredje nivået er *teknisk kunnskap*; kunnskap hvor verdi og gyldighet bekreftes med mer logiske kriterier og sunn fornuft. Hva som virker fornuftig ut fra den kunnskapen vi alt har. Vi vet noe på bestemte måter. Dette er ulik type kunnskap. De tre nivåene er ikke uavhengige. Mye av det vi gjør på det ”tekniske” nivået kan forklares med innhold fra det første og andre nivået av vår kunnskap. Vår holdning til matematisk kunnskap kan påvirke vår innsats for å løse et matematisk problem. Videre vil våre mentale skjemaer styre våre ideer om hvordan et matematisk problem kan løses.

Når elevene lærer matematikk eller andre fag, må de tilpasse ny kunnskap til allerede eksisterende kunnskap. Ofte er denne kunnskapen ufullstendig, og når elevene skal lære nye begreper som bygger på denne, kan det på et visst tidspunkt oppstå en konflikt, fordi idéene ikke stemmer overens. Den kunnskapen elevene har tilegnet seg, og som på enkelte områder er mangelfull, kan derfor virke som et hinder for videre læring (Sierpinska, 1992). Eleven kan komme forbi hinderet hvis han klarer å ta avstand til sine mentale skjemaer og tidligere ervervet kunnskap (overbevisning). Hvis vi klarer å ta et annet synspunkt oppnår vi et bevisst epistemologisk engasjement (Sierpinska, 1992). (*akkomodasjon/adaptasjonsprosessen*; Piaget, 1970*).*

”*Våre tanker er ikke uberørt av den virkeligheten som omgir oss. Hva enn vi sier, så ser og observerer vi det som omgir oss med våre egne ”briller”, ut fra hva vi allerede har lært, hvilke forestillinger og ideer vi har, hva vi tenker og hva vi ønsker å se. Noen av disse tankene og kunnskapen kan fungere som et hinder for vår forståelse av et fenomen når vi skal prøve å lære oss noe nytt”* (Bachelard, i Serpinska, 1994, s. xii).

Dette synspunktet på matematikken krever at vi tenker nytt når det gjelder undervisning, læring og bedømmelse av elevers forståelse. I stedet for å erstatte elevers ”gale” kunnskap med ”rett” kunnskap, bør læreren forsøke å gi eleven som har en misoppfatning oppgaver som utfordrer eleven og som skaper en mental konflikt. Hensikten er å utfordre eleven og få han til å revurdere sin kunnskap. Læreren må få kjennskap til de vanlige hindrene og drive konfliktorientert undervisning!

### 2.8.4 Noen epistemologiske hindre

Anna Sierpinska (1992) lister opp de mest vanlige epistemologiske hindrene innen temaet funksjoner og kommer med noen gode råd for å unngå at elevene skal gjøre feil av denne typen. Det er viktig at læreren kjenner til disse.

”The most fundamental conception of function is that of a relationship between variable magnitudes. If this is not developed, representations such as equations and graphs lose their meaning and become isolated from one another.” (Sierpinska, 1998, s. 572)

Hvordan læreren presenterer begrepet funksjoner, påvirker elevenes holdning til temaet. Dersom læreren klarer å vekke interesse hos eleven, vil elevene være mer mottakelige for ny kunnskap.  Læreren må få elevene interessert i å lete etter mønstre, se sammenhenger mellom variable størrelser, gjerne gjennom forsøk og forskning, før de introduserer veldefinerte matematiske funksjoner i klasserommet.

Funksjoner bør introduseres som sammenhenger mellom variable størrelser. Mange lærebøker presenterer funksjoner som statiske og ferdig definerte og elevene opplever at matematikken ikke kan knyttes mot praktiske utfordringer (*hinder nr 1*). Lærerens oppgave blir å forsøke å få elevene til å oppdage at dagligdagse hendelser kan sees på som utfordringer som kan løses ved hjelp av funksjoner. Det å kunne se mønsteret mellom de variable størrelsene er vesentlig for å kunne håndtere sammenhengene (Sierpinska, 1992).

Prosedyrer som beregner samsvarende verdier, tabeller med numeriske sammenhenger, er viktig. Mange elever sliter med å tolke grafer, de klarer ikke å se sammenhengen mellom to variable som for eksempel *avstand* og *tid*. De tolker grafen ut fra kun den ene variable. Eleven er mer opptatt av forflytningen enn av selve endringen, den sammenhengen grafen beskriver (*hinder nr 2*). For å klare å tolke en graf, et høyere abstrakt nivå enn prosedyrer for å beregne tallpar, må de ha automatisert algoritmen for å beregne nettopp tallpar. Eleven vil da kunne se at grafen viser sammenhengen mellom de to variable (Sierpinska, 1992).

Elevene har fokus på hvordan ting forandres, og overser hva som forandrer seg (*hinder nr 3*). De ser på grafen som et bilde av situasjonen. Lærerens utfordring er å få elevene til å oppdage årsaken til endring ved å se på selve endringen (Sierpinska, 1992).

Det Anna Sierpinska (1992) er opptatt av er hvordan vi kan undervise slik at elevene forstår. Forskningen på dette området bør kunne hjelpe læreren til å finne en god måte å drive undervisning på, slik at elevene unngår disse typiske misoppfatningene. Forskningen kan dermed være til stor hjelp i læringssituasjonen. Ved at læreren kjenner til typiske hindringer, har han mulighet til å finne måter å hjelpe eleven til å konstruere gode mentale strukturer.

### 2.9 Ulike representasjoner av funksjoner

Funksjoner opptrer i ulike former. En funksjon kan blant annet angis som en formel, graf, tabell, ved å beskrive dens egenskaper, eller ved å definere en algoritme som regner ut dens verdi. Ulike måter å tilnærme seg stoffet på bør benyttes og det er viktig å legge vekt på de ulike representasjonsformene til funksjoner. Kanadieren Claude Janvier (1978) skiller mellom følgene representasjonsformer:

- situasjon
- tabell
- graf
- formel

Funksjoner kan være uttrykk for sammenhenger i konkrete *situasjoner* og på den måten knyttes til hverdagen. Det kan for eksempel være temperatur som en funksjon av tid. Sammenhenger mellom to variable størrelser kan angis ved hjelp av grafer.

Når man jobber med funksjoner møter man ofte en *tabell* som representerer en funksjon. Tabeller finner vi i mange dagligdagse situasjoner. Et eksempel er tabeller over portotakster hvor porto for en pakke er en funksjon av vekt.

Funksjoner blir ofte identifisert med matematiske uttrykk; *formler*. Formler visualiseres gjennom *grafer*. *Grafer* tegnes som regel i et koordinatsystem.

Janvier (1978) har satt opp følgende matrise for å systematisere sammenhengen mellom de ulike formene å beskrive en funksjon på:

| Til<br>Fra | Situasjon | Tabell | Graf | Formel |
|---|---|---|---|---|
| Situasjon | --------------- | Måling | Skisse | Modellering |
| Tabell | Tolking av tabell | --------------- | Plotting | Tilpasning |
| Graf | Tolking av graf | Avlesning | --------------- | Kurvetilpasning |
| Formel | Gjenkjenning | Utregning | Skisse | ---------------- |

**Fra situasjon til tabell** kreves det at eleven gjør målinger og systematiserer data. Dette vil øve opp elevenes evne til å analysere praktiske situasjoner kvantitativt. Når man skal overføre informasjon fra situasjon til tabell, kan man bruke verditabell og systematisere informasjonen der. Når man skal overføre informasjonen **fra situasjon til graf** kreves det en større forståelse og beherskelse av grafer enn hvis man bare plotter inn tall fra en tabell. For eksempel, skisser en graf som viser avstand fra hjemmet som en funksjon av tid. **Fra situasjon til formel** innebærer å utlede en formel fra en situasjon, noe som kan være krevende.

Det kan ofte være vanskelig for elever å gå **fra tabell til situasjon**. Derfor er det en god øvelse for dem å beskrive med egne ord hva tabellen forteller om situasjonen eller virkeligheten. Man kan gi elevene i oppgave å fortelle, med utgangspunkt i en tabell, hvor mye en solsikke har vokst i løpet av en uke. For å gå **fra tabell til graf** bruker man ofte en verditabell. I en slik verditabell kan man lese av posisjoner for forskjellige punkt oppgitt i ($x$,$y$) eller ($x$,$f(x)$). Disse punktene markeres gjerne i et koordinatsystem. Når elevene skal gå **fra tabell til formel** blir elevenes evne til å finne mønster i tallutviklingen utfordret. Det krever også en forståelse av formler og hvordan de ulike kjennetegnene til grafene virker inn på formlene.

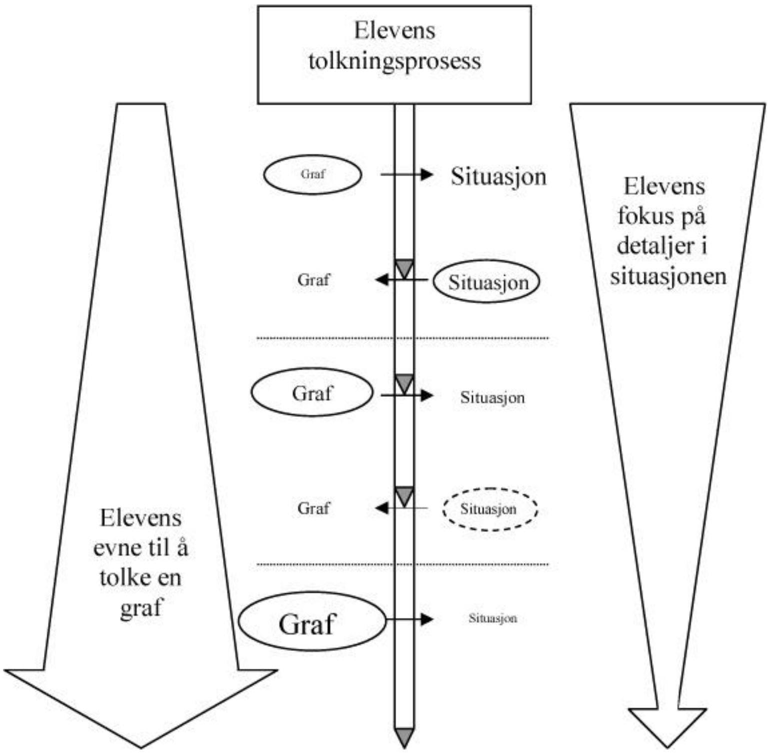
Når man lar elevene gå **fra graf til situasjon** øver man opp helhetsforståelsen av grafer. Da vil elevene lære seg å se sammenheng mellom to enheter som for eksempel tid og strekning, høyde og alder, mengde og pris osv. Det å la elevene med egne ord forklare en graf vil tydelig vise elevens forståelse. Det å gå **fra graf til tabell** vil gi elevene en øvelse i å lese av x- og y-verdien til punkter i et koordinatsystem. Når man skal gå **fra graf til formel** vil det være til stor hjelp for elevene å kjenne igjen formen på grafen; finne konstantledd og stigningstall når det er en lineær funksjon. Det å overføre informasjonen til en formel vil gi en større forståelse av grafens utvikling og egenskaper.

Hvis elevene skal gå **fra formel til situasjon** kreves en stor praktisk forståelse av formelen. Dette kan være en krevende utfordring for elever. Når elevene skal gå **fra formel til tabell** må man regne ut funksjonsverdier for utvalgte argumenter og setter opp en verditabell. En verditabell kan se slik ut:

| X | -2 | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| f(x) = 2x +3 | -1 | 3 | 7 | 11 |

For å kunne gå **fra formel til graf** må man tegne grafen ved hjelp av de vanligste kjennetegnene ved de ulike grafene. Det kan være kjennetegn som stigningstall og skjæringspunkt med y-aksen når vi har en lineær graf. Mange elever velger da å gå veien om en verditabell. Når elevene skal tegne grafer til for eksempel polynomfunksjoner av høyere grad og eksponentialfunksjoner, kan det være til stor hjelp og besparelse å benytte kalkulator eller pc.

Claude Janvier var opptatt av elevenes evne til å tolke grafer og deres evne til å bevege seg mellom de ulike representasjonsformene til funksjoner. Gjennom sin doktoravhandling (Janvier, 1978) avdekker han noen typiske problemer elevene har i forbindelse med funksjoner. Elevene har problemer med å bestemme hvor en graf vokser mest/minst (finne stigningstallet). Høyest på grafen forveksles med størst stigning. Elvene presterer svært dårlig når de skal gjøre om mellom algebraisk uttrykk og grafer. Videre sliter de med tolking av grafer som viser til bestemte situasjoner. Typisk misoppfatning er at de tolker grafen som et bilde av situasjonen.




**Figur 5**. Figuren illustrerer vanskelighetene elevene møter i forsøket på å tolke en graf. Elevene må klare å løsrive seg fra selve situasjonen, se på situasjonen som noe abstrakt, for å klare å tolke en graf. (Janvier, 1978, s. 10.4)

Det er viktig å være klar over forskjellen på å lese og å tolke en graf. Å kunne lese en graf vil si å kunne finne eksakte verdier (operasjonell forståelse). Når vi tolker en graf er vi ikke ute etter eksakte verdier, det kan skape mer forvirring enn nytte. Tolkning krever riktig bruk av enhetene langs aksene; at elevene klarer å koordinere de variable enhetene og se disse i sammenheng over et intervall. At de ser hvor grafen synker, vokser, har størst eller minst stigning og ser betydningen av dette i forhold til selve situasjonen den beskriver. Hvis eleven har for stor fokus på selve situasjonen/bildet klarer han ikke å overføre betydningen til grafen. Da vil han forsøke å overføre selve situasjonen til grafen eller bildet av situasjonen til grafen og vi har misoppfatningen *grafen som et bilde av situasjonen*. Noe som viser seg å være en typisk misoppfatning (Janvier, 1978).

For at elevene skal bli gode til å tolke og forstå betydningen av grafer, må de klare å løsrive seg fra selve situasjonen som grafen avspeiler (Se figur 5). Elevene må klare å se selve situasjonen som noe abstrakt og ikke være bundet opp til detaljene i den; eleven må tilegne seg strukturell forståelse.

Den visuelle forvirringen (misoppfatning) som eksisterer hos en del elever når de skal tolke en graf, forklarer Claude Janvier med *lokal forvirring* (Janvier, 1978, s. 10.6). *Lokal forvirring* er når eleven er detaljorientert; når de mener at grafiske detaljer må samsvare med situasjonen. For disse elevene kan ikke en rett linje på grafen tilsvare en kurve på figuren. Den grafiske tolkningen må tilsvare selve situasjonen (bilde eller tekst).

# 3 Metode

## 3.1 Valg av metode

Jeg ønsker med denne undersøkelsen å avdekke hvilke misoppfatninger elever i den videregående skolen har innenfor området funksjoner. For å få svar på dette, har jeg valgt å bruke spørreskjema med diagnostiske oppgaver og intervju.

Resultatet av de ulike oppgavene i spørreskjemaet presenteres i frekvens-tabeller og figurer fra statistikkprogrammet SPSS. Jeg har også foretatt en kvalitativ gjennomgang av enkelte elevtekster for å bedre komme inn på hvilke resonnementer elevene legger til grunn for sine svar, hvordan de tenker og hvilke strategier de bruker.

Bruk av spørreskjema er en av de vanligste og mest effektive metoder for å samle inn større mengder kvantitative data. Deltagelsesprosenten er som regel også stor, da spørreskjemaet deles ut i klassen. Noen av oppgavene i spørreskjemaet har jeg hentet fra KIM, mens andre har jeg selv konstruert. Det er viktig at spørreskjemaet ikke er for omfattende, slik at respondentene mister motivasjonen underveis. Ved utforming av spørreskjemaet har jeg for det meste brukt lukkede spørsmål, hvor respondenten står overfor et sett med faste svar-alternativer. Jeg har også brukt noen få åpne spørsmål, slik at respondentene har mulighet til å forklare hvordan de tenker når de tolker en graf.

Konstruksjonen av spørreskjemaet ble gjort med tanke på at respondentene er elever i videregående skole. Jeg har forsøkt å formulere spørsmål som avdekker typiske/kjente misoppfatninger. Oppgavene er konstruert med tanke på å diagnostisere misoppfatninger. For å få kjennskap til typiske misoppfatninger innen området og for å kunne konstruere oppgaver som skulle avdekke disse, har jeg sett på resultatet av Kim-undersøkelsen i ungdomsskolen, lest diverse litteratur som hovedfagsoppgaver, fagbøker og forskningsresultater. For å finne gode og egnede svaralternativer på oppgave 9 (kulebane), fikk jeg elever i egen klasse til tegne grafen til kulens bevegelse slik de trodde den ville se ut. Jeg valgte å ha få, men presise spørsmål og et lettfattelig språk for å unngå misforståelser og oppnå motivasjon til å delta.

I tillegg til spørreskjemaet har jeg foretatt intervju med noen elever for å utdype enkelte interessante funn. Gjennom samtalen vil eleven møte noe motsetningsfylt. Samtalen vil konfrontere eleven med dens svar som de igjen må forsøke å forklare ut fra egen erfaring og kunnskap. Dette for å kunne få en bedre forståelse for hvordan de tenker og resonnerer.

## 3.2 Kvantitativ metode

### 3.2.1 Elevgruppen og utvalget

I undersøkelse har jeg brukt egne klasser (*Non-probability sampling*, Robson, 2002). I tillegg har jeg plukket ut hele klasser som har valgt studiespesialiserende på henholdsvis Ringsaker videregående skole og Hamar Katedralskole. Totalt 211 elever har deltatt på undersøkelsen, hvorav 135 er fra VG1 og 76 fra VG2. Det betyr at det finnes individer i populasjonen som har sannsynlighet lik null for å bli med i utvalget og vi kan dermed statistisk sett ikke generalisere resultatet til populasjonen som en helhet.

### 3.2.2 Datainnsamlingen

#### 3.2.2.1 Pilotering

Før undersøkelsen ble foretatt i alle klasser, tok jeg testen på egen klasse for å finne ut om det var noen uklarheter i forbindelse med oppgavene. Det var ingen uklarheter blant disse elevene. Resultatet av piloteringen ga ikke noe svar på om oppgavene var egnet til å gi informasjon om de aktuelle misoppfatninger jeg var ute etter, til det var det for få respondenter.

#### 3.2.2.2 Koding

Før jeg startet kodingen i SPSS måtte jeg opprette variabler for alle spørsmålene og koder til de ulike svaralternativene. Oppgaver hvor elevene skulle tegne grafer gav mange ulike koder, mens oppgaver med faste svaralternativer (flervalgsoppgavene) gjorde arbeidet enkelt.

#### 3.2.2.3 Reliabilitet

Hvor konsistent og pålitelig måler jeg? Forstår elevene det samme som jeg med spørsmålene? En mulig svakhet er først og fremst knyttet til vurderingen av respondentenes svar. For å oppnå høy reliabilitet på kodingen, må arbeidet med å kode besvarelsene være konsistent og pålitelig. Det kan være spesielt utfordrene å kode åpne spørsmål. Jeg har forsøkt å løse dette problemet ved på forhånd å definere kriterier for hvordan elevenes svar skulle vurderes. De ulike kategoriene skal være så entydige og gode at det ikke skal være tvil om hvordan besvarelsen skal kodes. Når det er gode kategorier, vil ikke de forskjellige kategoriene overlappe hverandre, men være gjensidig utelukkende. Det betyr at hvis flere personer koder den samme besvarelsen, så skal koden bli den samme. Den samme koden skal man også få dersom en og samme person koder den samme besvarelsen flere ganger. Reliabiliteten blir oppgitt som et desimaltall i området 0 til 1, der 1 er optimalt og vil for eksempel si at 2 personer har identiske koder. Den oppgaven som antageligvis vil gi størst avvik og ha lavest reliabilitetskode er tekstoppgaven ”postkontoret”, mens flervalgsoppgavene sannsynligvis har reliabilitetskode lik 1. Reliabilitet i forbindelse med kodingen vil normalt være temmelig høy når kun en person koder. Siden jeg har stått for kodingen selv, vil jeg anta at reliabiliteten i min undersøkelse er god og har reliabilitetskode nær 1.

I spørreskjemaet jeg har utarbeidet er det flere oppgaver som forsøker å avdekke en og samme type misoppfatning (for eksempel graf som bilde av situasjonen). Ved å ta med ulike oppgaver som måler det samme, oppnås høyere reliabilitet (ulike måter å måle det samme på).

Under selve gjennomføringen var jeg selv eller klassens matematikklærer til stede for å informere, svare på eventuelle spørsmål og for å hindre at elevene samarbeidet om oppgavene. Det er svært viktig at elevene blir forklart bakgrunnen for undersøkelsen, men man kan allikevel ikke unngå at enkelte elever ikke tar undersøkelsen seriøst.

#### 3.2.2.4 Validitet

Hvor høy validiteten (gyldigheten) til en undersøkelse er, sier noe om hvor godt den måler det den skal måle. Det finnes forskjellige typer validitet (Real world research, 2002). Jeg vil her se nærmere på *construct validitet*, *innholdsvaliditet, indre validitet* og *ytre validitet.* Disse er viktige for å undersøke om oppgaven er egnet til å måle det jeg er ute etter.

**Construct validitet**.

Med construct validitet ser man på om det er overensstemmelse mellom begrepet og målingen av begrepsforståelsen. I min undersøkelse er misoppfatninger om funksjoner selve ”*constructet*” som jeg ønsker å måle. ”*Constructet”* operasjonaliseres ved hjelp av spørreskjemaet. Construct validitet sier da noe om mine oppgaver virkelig måler selve ”*constructet”*, og om jeg på bakgrunn av resultatene av undersøkelsen kan trekke slutninger om elevenes misoppfatninger. Det er under konstruksjonen av spørreskjemaet svært viktig å finne frem til de oppgaver som gir best mulig informasjon om elevenes misoppfatninger; oppgaver som undersøker elevenes begrepsforståelse når det gjelder funksjoner. Resultater fra de oppgavene i spørreskjemaet som er på samme form som oppgaver brukt i KIM-prosjektet, forventer jeg å kunne kunne trekke sikre slutninger fra. Disse er konstruert med henblikk på å avdekke elevens misoppfatninger og er utprøvd i stor skala. De oppgavene jeg selv har lagd, har jeg konstruert etter å ha lest resultater av andre undersøkelser og etter å ha satt meg inn i aktuell teori om emnet og om typiske misoppfatninger elevene har.

**Innholdsvaliditet**

Innholdsvaliditeten sier noe om innholdet i testen representerer området som skal testes. Jeg mener at spørsmålene i min undersøkelse har en tilstrekkelig høy innholdsvaliditet. Oppgavene er utarbeidet på grunnlag av lærebøker, læreplaner og tidligere Kim-tester. Jeg har ikke tatt med stoff som er nytt for elevene på VG1. Alle oppgavene skal kunne løses med den kunnskapen som elevene skal ha tilegnet seg på ungdomsskolen. Jeg underviser selv i videregående skole, og gjennom egen undervisningserfaring har jeg en viss kjennskap til elevenes forståelse og prestasjoner i faget. Dette har vært nyttig erfaring under arbeidet med å bestemme og konstruere oppgaver til spørreskjemaet. Følgelig mener jeg at validiteten av undersøkelsen er god.

**Indre validitet.**

Er slutningen gyldig for resultater innenfor studien/undersøkelsen? (box 5.1)
Utfordringen er å bestemme når et galt svar skyldes en misoppfatning. Jeg har i oppgavesettet tatt med flere oppgaver som forsøker å avdekke samme type misoppfatning. Dette for å prøve å skille mellom når det er en reell misoppfatning og når det er en tilfeldig feil. Når eleven er konsekvent og gjentatte ganger svarer det samme, skyldes det gale svaret en misoppfatning.

**Ytre validitet.**

Hvordan man plukker ut respondentene er helt avgjørende for resultatet og avgjørende for om man kan generalisere resultatet til hele populasjonen. Jeg har foretatt undersøkelsen i hele klasser ved to videregående skoler. Dette er elever som har valgt utdanningsprogram for studiespesialisering. Ingen av elevene i mitt utvalg kommer fra yrkesfaglig utdanningsprogram. Det betyr at det finnes individer i populasjonen som har sannsynlighet lik null for å bli med i utvalget. Det igjen betyr at vi statistisk sett ikke kan generalisere resultatet av undersøkelsen til populasjonen som helhet. Selv om utvalget mitt gjør at jeg ikke kan generalisere, vil resultatene fra undersøkelsen gi meg et grunnlag for å uttale meg om tendensene; om hvilke misoppfatninger som er utbredt blant elever som har valgt studiespesialisering i videregående skole.

### 3.2.3 Databehandling

Det er viktig at man allerede ved utformingen av spørreskjemaet tenker igjennom hvordan dataene skal behandles, slik at det blir enkelt både å registrere dataene og bearbeide dem i etterkant; at man sørger for å få et godt datagrunnlag til å foreta analyser og mulighet til å avdekke eventuelle misoppfatninger. Programmet jeg har brukt til å behandle innsamlet data fra spørreundersøkelsen er SPSS (The Statistical Package for the Social Science). Dette er et omfattende statistisk dataprogram beregnet for analyse og bearbeiding av statistiske data (Lie og Caspersen, 2004). Programmet håndterer på en fleksibel måte store datamengder.

#### 3.2.3.1 Deskriptiv statistikk

For å analysere dataene fra undersøkelsen har jeg benyttet deskriptiv statistikk. Deskriptiv statistikk er systematisk organisering og presentasjon av tallmateriale. Formålet er å lette presentasjonen og tolkningen av data. Deskriptiv statistikk omfatter prinsipp, metoder og teknikker for å sammenstille, presentere og tolke empiriske data. Det forteller noe om sentraltendenser (middelverdi, median, modus), spredning (varians, standardavvik) og om målingene er normalfordelt. Hvilke metoder og prinsipper som kan benyttes er avhengig av hvilken type måleskala man bruker for variablene.

#### 3.2.3.2 Måleskalaer for variable

Vi har *kategoriske* variable og *kontinuerlige* variable. De kategoriske variable deles opp i kategorier uten rekkefølge (kjønn, farge, bosted osv). Kontinuerlige variable kan rangeres i rekkefølge (alder, vekt, lønn osv)
*Nominal* skala kan sees på som merkelapper for kategoriske variable (mann=1, kvinne=2). Rekkefølgen er tilfeldig og dette er laveste nivå. De aller fleste variable jeg har definert i min undersøkelse er av denne typen.

*Ordinal* skala er det neste nivået og plasserer objektene i rekkefølge uten å si noe om avstanden mellom dem. For eksempel 1 = ikke viktig, 2 = noe viktig og 3 = viktig. Det er ikke nødvendigvis lik avstand mellom verdiene.

*Intervall* skala brukes når det er lik avstand; når vi har kontinuerlige variable. Med denne type variable kan man regne middelverdi, men ikke forhold, fordi det ikke er et gitt nullpunkt.
*Ratio* skala er den mest robuste. Med den kan man også beregne forhold, fordi variable av

denne typen har et bestemt nullpunkt (alder, vekt, lønn osv). Disse to siste typer av variable egner seg best til analyse.

Fordelingen av svarene i min undersøkelse er fremstilt i frekvenstabeller eller som søylediagram. Der to grupper av elevsvar skal sammenlignes, bruker jeg krysstabeller. Frekvensfordeling kan brukes på alle typer skalaer.

Korrelasjon er brukt til å sammenlikne svarene på oppgave 13, 14 og 15 for å se om det er noen sammenheng mellom elevers evne/vilje til å kontrollere og styre egen løsningsstrategi (metakognisjon) og hvor godt de liker eventuelt gjør det i faget. Korrelasjon kan representeres tallmessig gjennom korrelasjons-koeffisienter. Mest brukt er Person r, hvor r er et tall mellom -1 og 1. Hvor r = 1 angir perfekt positiv korrelasjon, r=-1 angir perfekt negativ korrelasjon mens r = 0 angir ingen samvariasjon. Hvis denne koeffisienten skal gi mening, må variablene være (ekte eller kvasi) intervall-variabler. Det kan være forskjellige grunner til at korrelasjonskoeffisienten er høy, og man må derfor være forsiktig med å trekke konklusjoner, fordi man nødvendigvis ikke har en enkel årsak - virkning forhold (Lie og Caspersen, 2004).

Når to spørsmål forsøker å avdekke den samme misoppfatning, bør det være høy korrelasjon mellom svarene på disse dersom reliabiliteten på undersøkelsen skal være god. For å kunne bruke korrelasjon på oppgave 5, 6 og 9, må jeg slå sammen en del kategorier for å få færre celler, ellers blir det for få forekomster i mange av cellene og resultatet av korrelasjons-testen kan ikke brukes.

## 3.3 Kvalitativ metode

Intervju som metode gir mulighet for å utdype et felt og en kan plukke ut de personene som passer til undersøkelsen. Ved å velge et ustrukturert intervju, det vil si uten et fastlagt skjema, oppnår man at respondenten fritt kan snakke om det aktuelle emnet. Man unngår da at intervjuerens forhåndsdefinerte spørsmål blir avgjørende og styrer samtalen.

### 3.3.1 Svakhet ved intervju som metode

En elev som gir et galt svar vil bli bedt om å utdype sitt svar. Det stilles stadig enklere spørsmål, det opprinnelige spørsmålet brytes ned, og spørsmålene vil preges av lærerens tilnærming til stoffet. Hvis flere underspørsmål ikke fører til et akseptabelt svar eller ikke fører til noe svar i det hele tatt, kan det føre til at eleven blir stresset og ikke lenger prøver å gjøre sitt beste (Janvier, 1978, s. 4.6).

Intervju som metode er svært sensitivt. Dersom eleven er nervøs, misforstår spørsmålene eller er trett, kan dette føre til at eleven ikke presterer i samsvar med sine evner. Videre viser det seg at spesielt jenter kan være redde for å svare på spørsmål og oppgaver som virker ukjente; de er redde for å gi galt svar (Janvier, 1978). Et annet problem er at enkelte elever prøver å svare det de tror intervjuer ønsker at de skal svare i stedet for å forsøke å svare ut fra egne evner.

# 4 Resultater og analyse

## 4.1 Utforming

Hensikten med spørreundersøkelsen er å kartlegge ulike misoppfatninger elever i videregående skole kan ha når det gjelder funksjonsbegrepet. De diagnostiske oppgavene kan være til hjelp med å avdekke eventuelle misoppfatninger elevene har. Jeg vil i dette kapittelet gjennomgå de ulike oppgavene og gi kommentarer til resultatene. Jeg bruker Janvier's tabell til å strukturere oppgavene for å vise til hvilke representasjonsformer den enkelte oppgave tester overgangen mellom. Videre er det ønskelig å se om det er noen sammenheng mellom operasjonell og strukturell forståelse. Er det slik at en elev som har operasjonell forståelse også har strukturell forståelse? Kan en elev ha strukturell forståelse uten å ha operasjonell forståelse?

For å utdype enkelte interessante funn, har jeg, i tillegg til den kvantitative undersøkelsen, valgt å foreta en kvalitativ undersøkelse. Resultatene fra intervjuene kommer i kapittel 4.3

I kapittel 5 vil jeg diskutere funnene, og om misoppfatningene kan knyttes til ulike undervisningstradisjoner. Videre hvilke hensyn som kan tas i undervisningen for å danne solide begrepsstrukturer.

Det har vært naturlig ut fra problemstillingen å undersøke følgende spørsmål:

- Hvilke misoppfatninger har elevene?
- Er det slik at elever som befinner seg på prosess-nivået viser tegn til det i alle oppgaver? Er det en sammenheng mellom svarene de gir?
- Hvilke løsningsstrategier benytter elevene?
- Kan misoppfatningene knyttes mot lærerkreftene, lærebøkene eller eventuelt andre forhold?

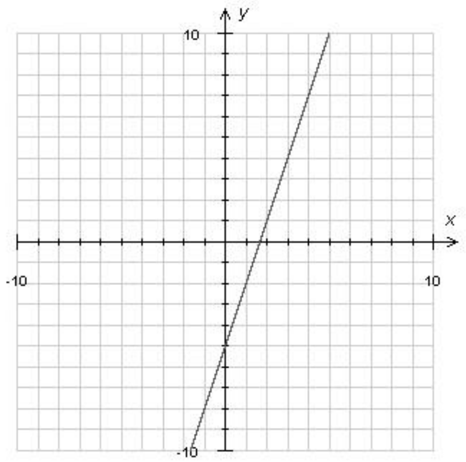
De ulike representasjonsformene til en funksjon er: tabell, graf, algebraisk utrykk/formel og situasjon/verbal beskrivelse. Claude Janvier (1978) har satt opp følgende tabell over sammenhengen mellom de ulike representasjonsformene. Denne vil jeg bruke til å systematisere de ulike oppgavene i testen. Tallene i parentes blir brukt i analysen til å knytte de ulike oppgavene opp mot tabellen, for å vise til hvilke representasjonsformer oppgaven tester overgangen mellom.

| Til<br>Fra | Situasjon (Verbal beskrivelse) | Tabell | Graf | Formel (Algebraisk uttrykk) |
|---|---|---|---|---|
| Situasjon (Verbal beskrivelse) | | Måling (1) | Skisse (2) | Modellering (3) |
| Tabell | Tolking av tabell (4) | | Plotting (5) | Tilpasning (6) |
| Graf | Tolking av graf (7) | Avlesning (8) | | Kurvetilpasning (9) |
| Formel (Algebraisk uttrykk) | Gjenkjenning (10) | Utregning (11) | Skisse (12) | |

## 4.2 kvantitativ undersøkelse

Mange elever sliter med å gjøre om mellom ulike representasjonsformer til funksjoner. Den første oppgaven tester om elevene klarer å bestemme det algebraiske uttrykket til en gitt graf. Jamfør celle 9 i Janviers tabell: Fra graf til algebraisk uttrykk.

### Oppgave 1.




Hvilket funksjonsuttrykk passer til grafen? (Sett ett kryss)

| | | | |
|---|---|---|---|
| ☐ y = x – 5 | ☐ y = 5x + 2 | ☐ y = 3x – 5 | ☐ y = 5 -3x |

**Tabell 4.1 Svarfordeling til oppgave 1.**

| | | Frequency | Percent | Valid Percent | Cumulative Percent |
|---|---|---|---|---|---|
| Valid | y=x-5 | 41 | 19,4 | 19,6 | 19,6 |
| | y=5x+2 | 47 | 22,3 | 22,5 | 42,1 |
| | y=3x-5 | 104 | 49,3 | 49,8 | 91,9 |
| | y=5-3x | 16 | 7,6 | 7,7 | 99,5 |
| | 8 | 1 | ,5 | ,5 | 100,0 |
| | Total | 209 | 99,1 | 100,0 | |
| Missing | Missing | 2 | ,9 | | |
| Total | | 211 | 100,0 | | |

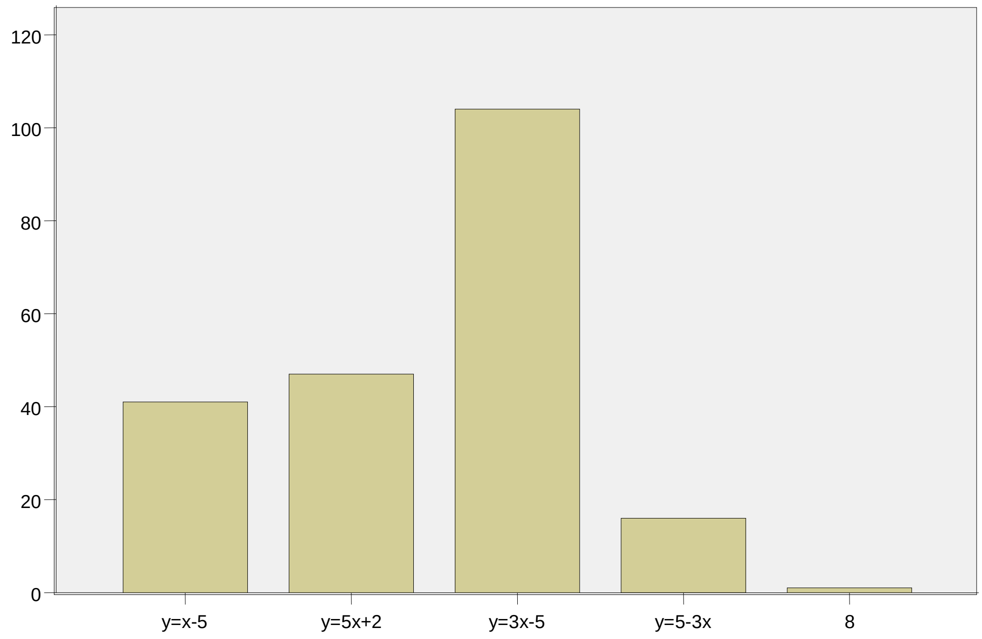
Vi ser av tabellen at 49,3 % av elevene har svart riktig. Av de som har svart feil har 22,3 % svart alternativ 2, y=5x + 2. Grafen skjærer x-aksen omtrent i punktet 2 og forklaringen kan være at elevene tror at konstantleddet i uttrykket bestemmer skjæring med x-aksen. 19,4 % har svart alternativ 1, y=x-5. Dette alternativet kan ha blitt valgt fordi det var det første alternativet og elevene så at konstantleddet (skjæring med y-aksen) var riktig.

Mange elever har problemer med å se sammenhengen mellom en graf og dens algebraiske uttrykk; hva som er konstantledd og hva som er stigningstall. Et generelt uttrykk for en lineær funksjon er f(x) = ax+b. I et slikt uttrykk vil grafen av funksjonen alltid være en rett linje og *a* og *b* vil være konstanter og *x* vil være en variabel. *a* vil være stigningstallet, mens *b* vil avgjøre hvor linjen skjærer y-aksen. En stor del av elevene har tydeligvis ikke noe forhold til disse begrepene og ser ikke sammenhengen mellom uttrykket og grafen.

Det kan virke som mange av elevene befinner seg på prosedyre-nivået her. De har lært seg teknikker som egner seg til å tegne grafer, men de klarer ikke å generalisere og dermed skaper det problemer når de skal reversere og finne det algebraiske uttrykket til en graf. Lærebøkene legger størst vekt på å tegne grafer ut fra et uttrykk. Elevene klarer ikke å overføre kunnskapen og se sammenhenger. Det er mulig at elevene ikke har nok erfaring i å bestemme det algebraiske uttrykket til en graf.

Regler som blir pugget av elevene, uten at de vet hvordan eller om reglene virker, danner et dårlig grunnlag for begrepsforståelsen, fordi kunnskapen blir stående som løsrevet faktakunnskap.  Den kognitive strukturen danner svake relasjoner og elevene har da få muligheter til å resonnere seg frem til kunnskapen igjen når fakta blir glemt.

**Figur 4.2 Diagrammet viser svarfordeling til oppgave 1.**




Den neste oppgaven tester elevenes kunnskaper i å tegne en graf med utgangspunkt i et algebraisk uttrykk. Jamfør celle 12 i Janviers tabell: Fra algebraisk uttrykk til graf.

**Oppgave 2.**

Her er tre funksjoner. Tegn grafene.

a) y=x  b) 2x + y = -8  c) y=5

Funksjonene i denne oppgaven er ikke på standard form, noe som kan virke forvirrende på elevene. I oppgave a mangler konstantleddet. Oppgave b må omformes og oppgave c mangler x-leddet og dermed stigningstallet.

**Tabell 4.3 Tegn grafen y=x**

| | | Frequency | Percent | Valid Percent | Cumulative Percent |
|---|---|---|---|---|---|
| Valid | Riktig graf | 68 | 32,2 | 43,6 | 43,6 |
| | x-aksen | 23 | 10,9 | 14,7 | 58,3 |
| | y-aksen | 8 | 3,8 | 5,1 | 63,5 |
| | rett linje fra en verdi på y-aksen til samme verdi på x-aksen | 7 | 3,3 | 4,5 | 67,9 |
| | feil stigningstall | 5 | 2,4 | 3,2 | 71,2 |
| | feil konstantledd/skjæring m y-aksen | 3 | 1,4 | 1,9 | 73,1 |
| | Riktig graf, men starter i origo | 7 | 3,3 | 4,5 | 77,6 |
| | Punkt i origo | 27 | 12,8 | 17,3 | 94,9 |
| | Linje gjennom y=1 og stigntall lik 0 | 2 | ,9 | 1,3 | 96,2 |
| | Helt feil | 3 | 1,4 | 1,9 | 98,1 |
| | Linje gjennom x=1 parallelt m y-aksen | 3 | 1,4 | 1,9 | 100,0 |
| | Total | 156 | 73,9 | 100,0 | |
| Missing | Missing | 55 | 26,1 | | |
| Total | | 211 | 100,0 | | |

Vi ser at hele 26,1 % har unnlatt å svare. Dette er et forholdsvis stort antall. Det er kun 32,2 % som har tegnet grafen riktig. Vi kan gjenkjenne noen typiske misoppfatninger: *Grafen starter i origo*. 3,3 % tegner grafen med riktig stigningstall, men den starter i origo. De tegner ikke grafen for negative verdier av x. *Graf som et punkt*. 12,8 % tegner grafen som et punkt i origo. De tenker kanskje at i dette punktet er y-aksen lik x-aksen (y=x) fordi aksene krysser hverandre i dette punktet. 10,9 % tegner en graf som går i ett med x-aksen, som om det er x-aksen. Mange elever mangler forståelse av selve funksjonsbegrepet; at hver verdi av x gir en bestemt verdi for y.

Den neste grafen de skulle tegne bød på enda større problemer.  Hele 24,6 % av elevene har unnlatt å svare. Kun 15,2 % har svart riktig. Dette er et utradisjonelt funksjonsbegrep og elevene har tydeligvis ikke noen særlig erfaring med å omforme uttrykk av denne typen. 33 % har tegnet grafen med riktig konstanledd men feil stigningstall. 10,4 % har riktig konstantledd, men grafen skjærer x-aksen i 2. Noen elever tegner grafen som et punkt med koordinater (2,-8), noe som tyder på at de antar at sammenhengen mellom x og y bare gjelder en verdi. Mange av elevene har nok bare gjettet og tegnet helt vilkårlig.

**Tabell 4.4 Tegn grafen 2x+y= −8**

| | | Frequency | Percent | Valid Percent | Cumulative Percent |
|---|---|---|---|---|---|
| Valid | Riktig graf | 32 | 15,2 | 20,1 | 20,1 |
| | Feil stigningstall | 33 | 15,6 | 20,8 | 40,9 |
| | Feil konstantledd/skjæring med y-aksen | 8 | 3,8 | 5,0 | 45,9 |
| | Helt feil | 54 | 25,6 | 34,0 | 79,9 |
| | Linja starter på y-aksen | 3 | 1,4 | 1,9 | 81,8 |
| | Linje gjennom y=1 og x=2 | 5 | 2,4 | 3,1 | 84,9 |
| | riktig konstantledd skjærer x-aksen i 2 | 22 | 10,4 | 13,8 | 98,7 |
| | (x,y)=(2,-8) | 2 | ,9 | 1,3 | 100,0 |
| | Total | 159 | 75,4 | 100,0 | |
| Missing | Missing | 52 | 24,6 | | |
| Total | | 211 | 100,0 | | |

**Tabell 4.5 Tegn grafen y=5**

| | | Frequency | Percent | Valid Percent | Cumulative Percent |
|---|---|---|---|---|---|
| Valid | Riktig graf | 76 | 36,0 | 44,2 | 44,2 |
| | Linje gjennom x=5. Stigningstall lik 0 | 4 | 1,9 | 2,3 | 46,5 |
| | Linje gjennom y=-5. Stigningstall lik 0 | 2 | ,9 | 1,2 | 47,7 |
| | Riktig, men starter på y-aksen | 5 | 2,4 | 2,9 | 50,6 |
| | Fra x=-5 til y=5 | 12 | 5,7 | 7,0 | 57,6 |
| | Punktet (0,5) | 39 | 18,5 | 22,7 | 80,2 |
| | Helt feil | 29 | 13,7 | 16,9 | 97,1 |
| | Linje fra y=5 til y=-5 | 5 | 2,4 | 2,9 | 100,0 |
| | Total | 172 | 81,5 | 100,0 | |
| Missing | Missing | 39 | 18,5 | | |
| Total | | 211 | 100,0 | | |

Vi ser av resultatet at det er en utbredt misoppfatning at grafen blir oppfattet som et punkt (0,5), det vil si at det bare er èn x-verdi. Hele 18,5 % har gitt et slikt svar. Bare 36 % av elevene har svart riktig og 18,5 % har unnlatt å svare.

Ønsker å undersøke om de elevene som tegnet grafen y=x som et punkt i origo også tegnet grafen y=5 som punktet (0,5).

**4.6 Oversikt over hvor mange elever som tegnet både y=x og y=5 som et punkt.**

| | | Frequency | Percent | Valid Percent | Cumulative Percent |
|---|---|---|---|---|---|
| Valid | Riktig graf | 2 | 7,4 | 10,0 | 10,0 |
| | Fra x=-5 til y=5 | 1 | 3,7 | 5,0 | 15,0 |
| | Punktet (0,5) | 14 | 51,9 | 70,0 | 85,0 |
| | Helt feil | 3 | 11,1 | 15,0 | 100,0 |
| | Total | 20 | 74,1 | 100,0 | |
| Missing | Missing | 7 | 25,9 | | |
| Total | | 27 | 100,0 | | |

Ser fra tabellen at litt over halvparten av elevene som tegnet grafen i oppgave 1a som et punkt er konsekvente og tegner grafen i 1c som et punkt også.

Generelt kan vi si at elevene har store problemer med å tegne grafer til algebraiske uttrykk. Vi har identifisert noen typiske misoppfatninger. Én misoppfatning er at en graf alltid starter på y-aksen. En annen er at elevene tegner punkter i stedet for linjer. Elevene ser kanskje på funksjonsuttrykket som en likning. Og når elevene løser likninger, finner de én verdi for x og én verdi for y. Det kan virke som elevene har liten erfaring med å tegne grafer ut fra algebraiske uttrykk, eller at de kun har erfaring med algebraiske uttrykk gitt på på den generelle formen, $y = ax + b$, hvor både stigningstall og konstantledd er med. Det kan skyldes at denne typen spesialtilfeller (som er gitt i denne oppgaven) ikke er viet noen større oppmerksomhet i de undervisnings- og innlæringsaktivitetene som disse elevene har erfaring fra. En annen årsak kan være at elevene normalt går via verditabell når de skal tegne en graf ut fra et algebraisk uttrykk (celle 11 i Janviers tabell).

Det kan være at elevene har lært seg en teknikk for å tegne rette linjer, men når formen på uttrykket ikke er kjent, klarer de ikke å tegne grafen. Elevene har kun prosedyre-kunnskap. De har ingen forståelse og klarer ikke å generalisere og overføre kunnskapen til uttrykk som ikke er på standardformen. Prosedyrer som ikke er knyttet til begreper vil vanskelig kunne overføres til andre kontekster enn der de er lært. De klarer ikke å se relasjonen mellom algebraisk uttrykk og graf. De har ikke nådd objekt-nivået og klarer ikke å forholde seg til grafer som et abstrakt begrep.

En svakhet ved oppgaven er at jeg ikke tok med et helt ordinært uttrykk på formen $y=ax + b$, for å se om elevene klarte å tegne grafen til dette funksjonsuttrykket.

Sammenlikner vi med resultatene fra KIM-prosjektet, kan vi se en liten posistiv utvilking i elevenes kunnskap i å tegne grafer til lineære funksjoner fra 9. Klasse til VG1.

I henhold til L97 skal elevene kunne utforske og arbeide med lineære funksjoner og likninger når de går ut av ungdomsskolen. Dermed må vi kunne forvente at dette er kjent stoff for elevene. Det kan virke som at elevene ikke har nådd disse målene i læreplanen.

Hensikten med neste oppgave er å finne ut om elevene klarer å se sammenhengen mellom tabell og algebraisk uttrykk. Jamfør celle 6 i Janviers tabell: Fra tabell til algebraisk uttrykk.

**Oppgave 3.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 |
| y | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 |

Hvilke funksjonsuttrykk passer til tabellen? (Sett kryss)

| | | | |
|---|---|---|---|
| ☐ y = x + 7 | ☐ y = 8x | ☐ x – y + 7 = 0 | ☐ y = x + 3 |

**Tabell 4.7 Hvilket funksjonsuttrykk passer til verdiene i tabellen?**

| | | Frequency | Percent | Valid Percent | Cumulative Percent |
|---|---|---|---|---|---|
| Valid | y=x+7 | 90 | 42,7 | 45,2 | 45,2 |
| | y=8x | 43 | 20,4 | 21,6 | 66,8 |
| | x-y+7=0 | 16 | 7,6 | 8,0 | 74,9 |
| | y=x+3 | 35 | 16,6 | 17,6 | 92,5 |
| | Riktig svar | 9 | 4,3 | 4,5 | 97,0 |
| | y=8x OG x-y+7=0 | 2 | ,9 | 1,0 | 98,0 |
| | y=x+7 og y=8x | 3 | 1,4 | 1,5 | 99,5 |
| | x-y+7=0 og y=x+3 | 1 | ,5 | ,5 | 100,0 |
| | Total | 199 | 94,3 | 100,0 | |
| Missing | Missing | 12 | 5,7 | | |
| Total | | 211 | 100,0 | | |

I oppgaven var det gitt en standard funksjonstabell som viser sammenhengen mellom x og y. Her er det to riktige svar, alternativ 1 og 3 gir samme resultat, kun 4,3 % av elevene har svart begge. En mulig årsak til dette kan være at når de fant ut at den første funksjonen passet, så har de tenkt at de var ferdig og gått videre til neste oppgave. En annen årsak kan være at alternativ 3 har en noe uvant form og krever omforming. Det som er litt merkelig er at de 7,6 % av elevene som har svart alternativ 3 ikke også har svart alternativ 1. Har de bare svart helt vilkårlig? 20,4 % har svart alternativ 2. Dette er nok fordi de har sett at dette uttrykket passer til den første (x,y)-verdien og at de ikke har prøvd om det passer videre i tabellen. De ser tallet 8 som også er i tabellen. Det er litt overraskende at så mange som 16,6 % har svart alternativ 4. Det er forholdsvis enkelt å se at x=1 og y=8 ikke passer inn i uttrykket. Elevene som har svart dette, har antagelig sett at x-verdiene i tabellen øker med et fast intervall på 3. Og fordi elevene mangler forståelse for at funksjsuttrykket viser relasjonen mellom x og y, så svarer de dette.

Grunnen til at så få elever krysset av for begge de riktige svarene, kan være at det i oppgaveteksten ikke kom tydelig frem at de kunne sette flere kryss.

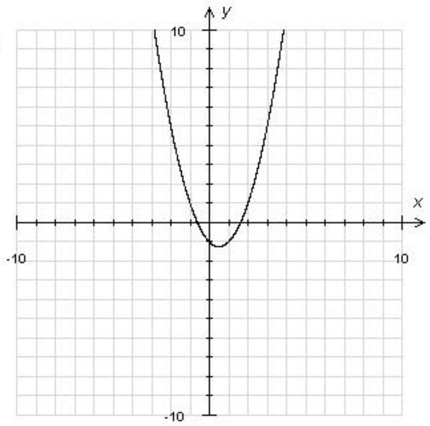
Som en oppsummering for disse oppgavene som tester elevenes kunnskap om rette linjer i koordinatsystemet, viser undersøkelsen at mange elever har lite eller ingen forståelse.Svært mange av elevene befinner seg på prosedyre-nivået eller pre-prosedyre nivået (DeMarios & Tall, 2004). Når uttrykket er på en litt annen form en det elevene er vant med, klarer de ikke å løse oppgavene. Når elevene er på pre-prosedyre eller prosedyre-nivået har de stor fokus på detaljer i selve algoritmen og de klarer ikke å overføre betydningen til en annen kontekst. Elevene har kun operasjonell forståelse (Sfard, 1992).

Kalkulatoren hjelper elevene til å visualisere algebraiske uttrykk. Den er en link mellom det visuelle og det symbolske. Den kan være til stor nytte, men kan også føre til misoppfatninger. Når vi har en lineær funksjon på formen y = ax + b, vil en endring i b kunne oppfattes som en bevegelse av linja horisontalt eller vertikalt, avhengig av formen på vinduet og vinkelen grafen danner med dette vinduet. Og når man endrer enhet på aksene vil en og samme parabol tegnet med forskjellige enheter på aksene kunne se forskjellige ut (Goldenberg,1988, i Romberg, 1993, s. 123).

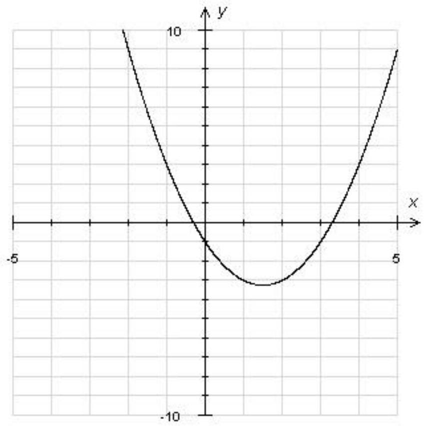
Den neste oppgaven fremstiller tre grafer. To av disse har det samme algebraiske uttrykket, men de er tegnet med ulik enhet på aksene. Elevene skal finne hvilke to grafer som har samme funksjonsuttrykk. Jamfør celle 9 og 8 i Janviers tabell: Fra graf til algebraisk uttrykk.

**Oppgave 4**

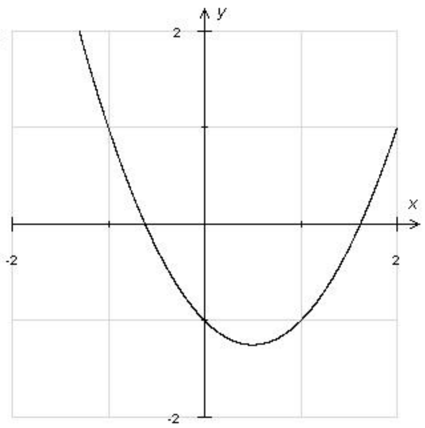
A




B




C




Hvilke av disse grafene har samme funksjonsuttrykk? (Sett et kryss)

| | | | |
|---|---|---|---|
| ☐ A og B | ☐ A og C | ☐ B og C | ☐ Ingen av dem |

**Tabell 4.8 Hvilke to grafer har samme funksjonsuttrykk?**

| | | Frequency | Percent | Valid Percent | Cumulative Percent |
|---|---|---|---|---|---|
| Valid | A og B | 19 | 9,0 | 9,2 | 9,2 |
| | A og C | 116 | 55,0 | 56,3 | 65,5 |
| | B og C | 48 | 22,7 | 23,3 | 88,8 |
| | Ingen av dem | 23 | 10,9 | 11,2 | 100,0 |
| | Total | 206 | 97,6 | 100,0 | |
| Missing | Missing | 5 | 2,4 | | |
| Total | | 211 | 100,0 | | |

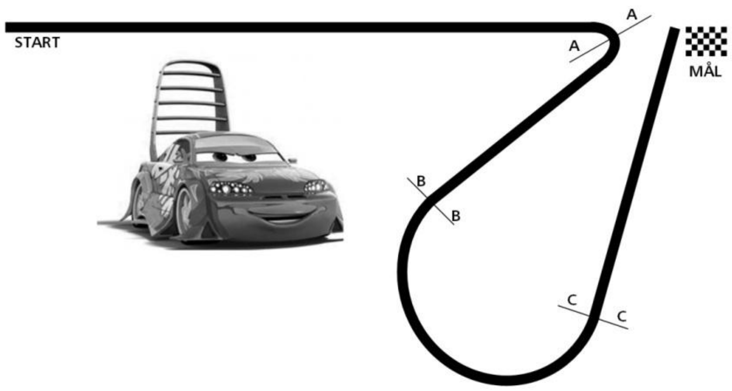
Riktig svar er her A og C. Vi ser at 55 % svarer riktig på denne oppgaven. 22,7 % svarer B og C. Grafene på figur B og C ser like ut (har lik fasong), men enhetene på aksene er ikke den samme. Grafene på figur A og B kan også se like ut på grunn av at de er tegnet i koordinatsystem med ulike enheter på aksene, men de har forskjellig funksjonsuttrykk. 9 % mener dette er riktig svar. Elevene lar seg tydeligvis forvirre av at samme graf kan se forskjellig ut med ulike enheter på aksene eller ulike grafer ser like ut med forskjellig enhet på aksene.

Å tolke grafer forutsetter at eleven klarer å forholde seg til en graf som et abstrakt begrep. Dette er for mange vanskelig. De må kunne se på grafen som noe strukturelt. Men i denne oppgaven vil det være tilstrekkelig at eleven ser på grafen som noe operasjonelt. Det holder her at elevene har kjennskap til begrepet bunnpunkt og klarer å lese av koordinatene til dette punktet (avlesning). Da vil de lett kunne se hvilke to funksjoner som må ha samme algebraiske uttrykk. Alternativt kan de lese av verdier der grafene skjærer aksene. Denne oppgaven tester operasjonell forståelse (Sfard, 1992).

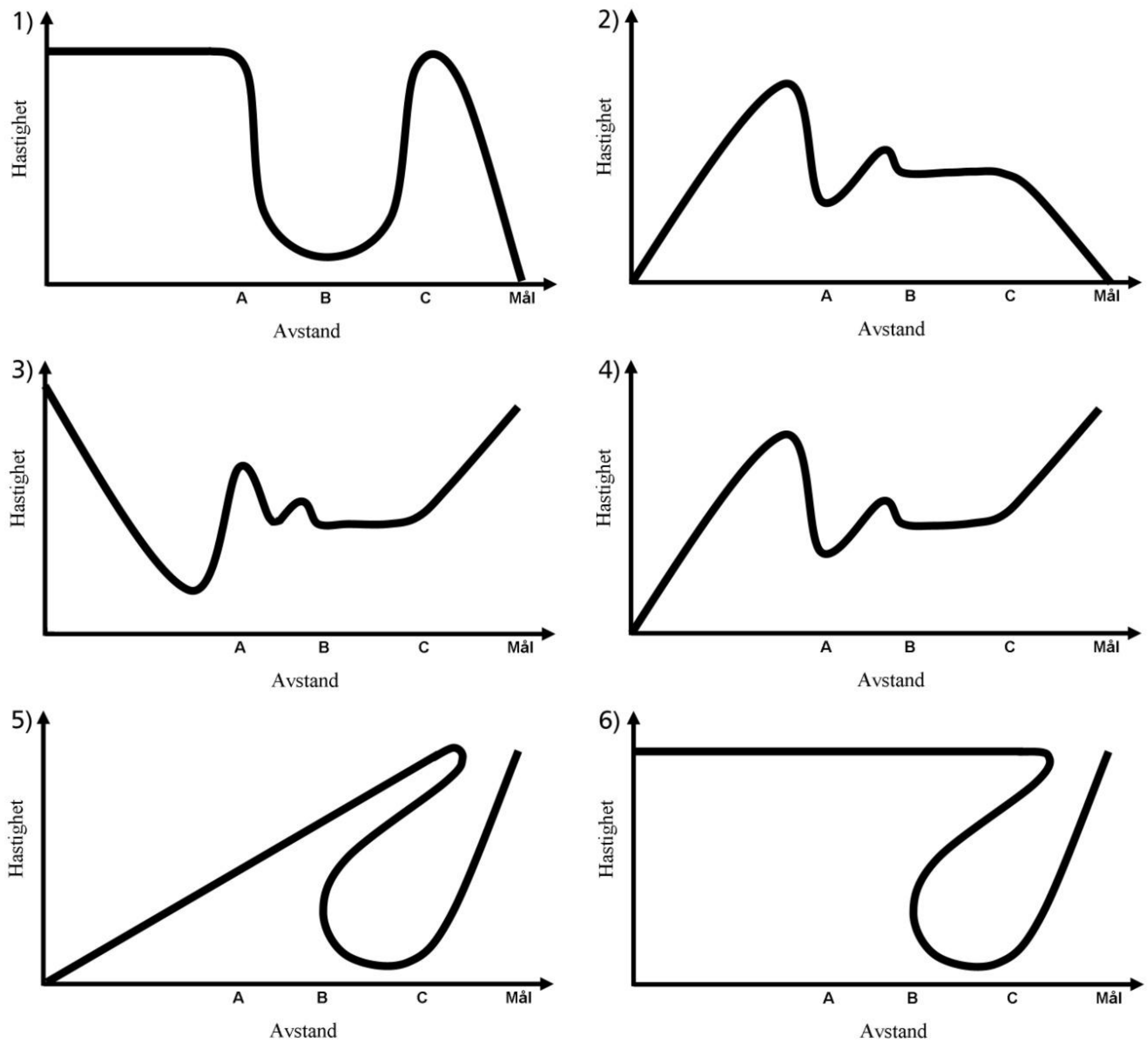
I oppgave 5 vises det til en figur av en fartsetappe i et rally. Blant seks ulike grafer skal elevene plukke ut den som best beskriver hastigheten til bilen. Jamfør celle 2 i Janviers tabell: Fra situasjon til graf. En vanlig misoppfatning blant elevene er å tegne grafen som et bilde av situasjonen (Janvier, 1978, s. 15.1).

**Oppgave 5**

Figuren viser banen til en fartsetappe i et rally.




Hvilken av grafene under mener du beskriver hastigheten til bilen best?



Elevene må her koordinere figuren av fartsetappen og grafen. For å kunne tolke grafen, kreves det at elevene klarer å tenke abstrakt om selve situasjonen (Janvier, 1978, s. 10.1). For å mestre dette må de ha kunnskap om det abstrakte begrepet fart.

Det som kan være utfordrende for en del elever her, er at de må tolke bilens fart ut fra en figur for å få informasjon om selve situasjonen og deretter koordinere figur og situasjon med riktig graf (Janvier, 1978, s. 10.6). Eleven må gå veien om en verbal beskrivelse.

De må videre kunne forholde seg til relasjonen mellom de to variablene avstand og hastighet, som krever at de ser på grafen som noe strukturelt.

**Tabell 4.9 Hvilken graf beskriver hastigheten til bilen best?**

| | | Frequency | Percent | Valid Percent | Cumulative Percent |
|---|---|---|---|---|---|
| Valid | Graf 1 | 7 | 3,3 | 3,3 | 3,3 |
| | Graf 2 | 16 | 7,6 | 7,6 | 11,0 |
| | Graf 3 | 8 | 3,8 | 3,8 | 14,8 |
| | Graf 4 | 125 | 59,2 | 59,5 | 74,3 |
| | Graf 5 | 37 | 17,5 | 17,6 | 91,9 |
| | Graf 6 | 17 | 8,1 | 8,1 | 100,0 |
| | Total | 210 | 99,5 | 100,0 | |
| Missing | Missing | 1 | ,5 | | |
| Total | | 211 | 100,0 | | |

Vi ser her at 59,2 % av elevene svarer riktig. Av de som svarer galt, er det 8,1 % som svarer graf 6, som er en graf med identisk utseende som selve fartsetappen. Elevene som har svart denne har misoppfatningen *graf som bilde av situasjonen*. Denne grafen gir uttrykk for at bilen starter med svært høy hastighet. Hele 17,5 % svarer graf 5, som også har utseende temmelig lik selve fartsetappen, men her starter hastigheten i null. Totalt er det 25,6 % av elevene som svarer graf 5 eller 6. Begge disse grafene viser at bilen kjører tilbake mot start mellom punkt C og B; avstanden fra start blir mindre. Det er tydelig at mange av elevene ikke klarer å tolke grafen ut fra begge variable. De er detaljorientert og klarer ikke å fjerne seg fra selve situasjonen. De har i følge Janvier (1978) en *lokal forvirring.*

Når elevene ikke kan benytte en kjent prosedyre for å komme frem til svaret, som i denne oppgaven, er det en del elever som gir opp. De klarer ikke å se sammenhengen mellom situasjon og graf fordi de ikke har strukturell forståelse (Sfard, 1992).

**Tabell 4.10 Hvilken graf beskriver hastigheten til bilen best? Fordeling av svar fordelt på gutter og jenter i antall.**

| | | Fartsetappe | | | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Graf 1 | Graf 2 | Graf 3 | Graf 4 | Graf 5 | Graf 6 | |
| Er du jente eller gutt? | Jente | 6 | 10 | 5 | 71 | 28 | 11 | 131 |
| | Gutt | 1 | 6 | 3 | 54 | 9 | 5 | 78 |
| Total | | 7 | 16 | 8 | 125 | 37 | 16 | 209 |

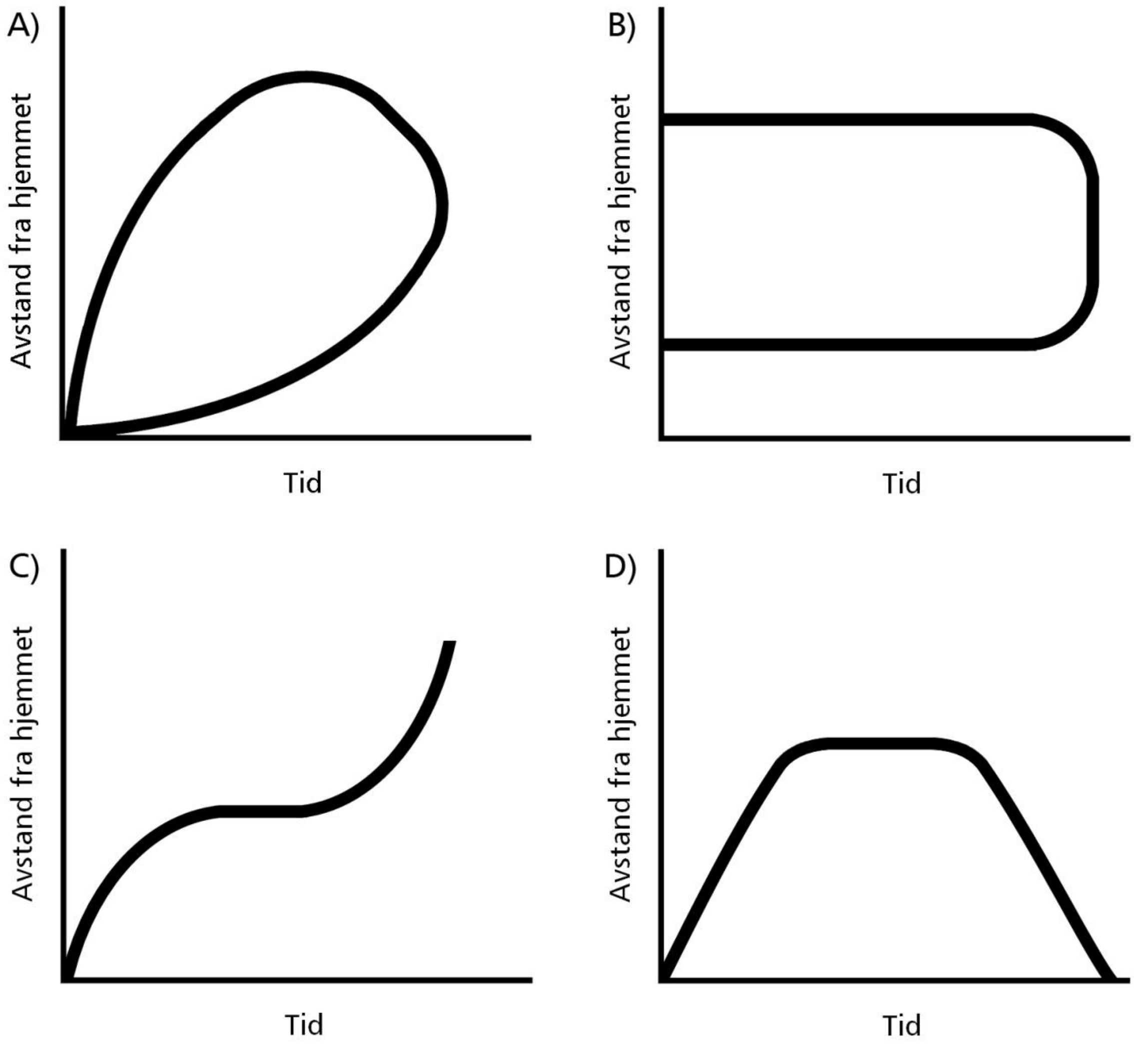
Jeg ønsker å sjekke om jenter og gutter svarer forskjellig på oppgave 5. I undersøkelsen Janvier foretok i 1978, var det signifikant dårligere resultat for jentene enn for guttene på en tilsvarende oppgave. Dette mente han var på grunn av at guttene hadde større interesse og mer kunnskap om biler og billøp. Finner her at det er 69 % av guttene som svarer riktig på denne oppgaven mot 54 % av jentene. Blant guttene er det 18 % som svarer graf 5 eller 6 mens 30 % av jentene svarer det samme. Det kan virke som om guttene har større evne til å tenke abstrakt om selve situasjonen, nettopp fordi de har større interesse for billøp.

I oppgave 6 skal elevene bestemme hvilken graf som passer best til en verbalt beskrevet situasjonen. Jamfør celle 2 i Janviers tabell: Fra situasjon til graf. De blir også bedt om å begrunne svaret sitt. Bakgrunnen til dette, var ønsket om å finne ut mer om hvordan elevene tenkte.

**Oppgave 6**

Hanne skal gå til postkontoret for å levere en pakke. Hun går hjemmefra med jevn hastighet. På postkontoret må hun stå i kø før hun blir ekspedert. Deretter går hun hjem med samme hastighet.

Hvilken av grafene under mener du beskriver turen til Hanne best?




| | |
|---|---|
| Svar: | |
| Hvorfor passer denne best? | |

**Tabell 4.11 Hvilken graf beskriver Hannes tur til postkontoret best?**

| | | Frequency | Percent | Valid Percent | Cumulative Percent |
|---|---|---|---|---|---|
| Valid | Graf A | 13 | 6,2 | 6,2 | 6,2 |
| | Graf B | 53 | 25,1 | 25,4 | 31,6 |
| | Graf C | 29 | 13,7 | 13,9 | 45,5 |
| | Graf D | 114 | 54,0 | 54,5 | 100,0 |
| | Total | 209 | 99,1 | 100,0 | |
| Missing | Missing | 2 | ,9 | | |
| Total | | 211 | 100,0 | | |

Grafen viser avstand fra hjemmet i forhold til tiden. 54 % gir riktig svar og av disse er det kun litt over halvparten som gir en fornuftig begrunnelse, mens hele 25,1 % oppgir B som riktig graf. Elevene mener at Hanne går med jevn fart på de flate partiene av grafen, de ser ikke at avstanden er konstant og at hun faktisk står stille. 13,7 % oppgir C som riktig graf. Mer enn halvparten av disse begrunner valget med at Hanne går med jevn fart. De forholder seg kun til tiden og ser ikke at Hanne aldri kommer hjem. 6,2 % mener at alternativ A er riktig. Dette er en typisk misoppfatning, hvor elevene tolker grafen geometrisk, eller som et kart, hvor man skal komme tilbake til utgangspunktet. De klarer kun å tolke grafen ut fra en variabel; avstand fra hjemmet.

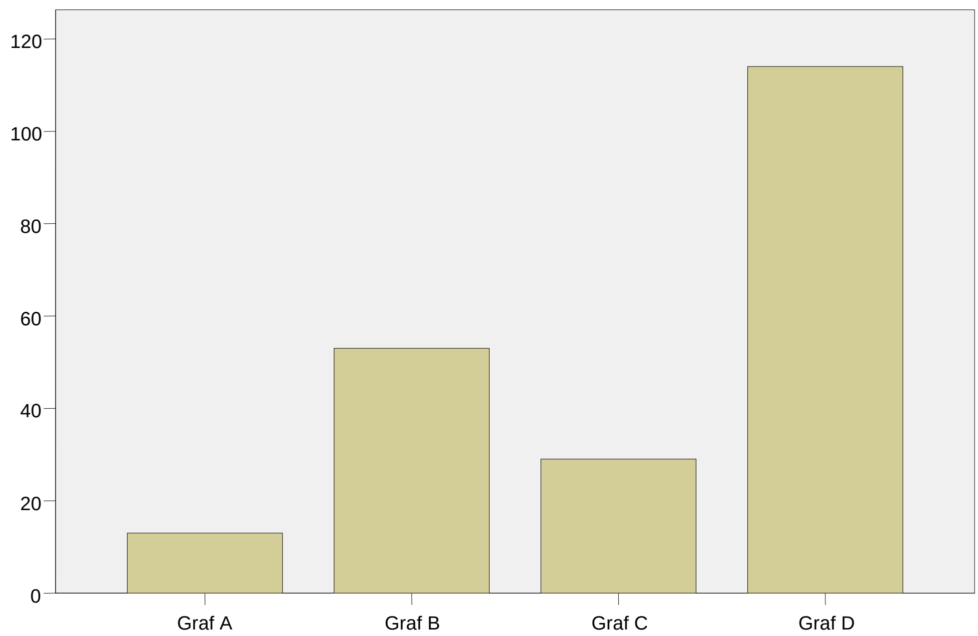
De vanlige misoppfatningene her er at elevene ser på grafen som et bilde av en situasjon (konkret) og ikke som en matematisk representasjon (abstrakt). Elevene har en *lokal forvirring* i følge Janvier (1978). Mange elever har problemer med å se sammenhengen mellom to variable. De klarer ikke å koordinere de variable enhetene og se disse i sammenheng over et intervall. De tolker grafen kun ut fra den ene variabelen. Mange av elevene er mer opptatt av forflytningen enn selve endringen (*hinder nr 2,* Sierpinska, 1992). Det kan virke som om de ikke ser etter hvilke enheter som er brukt på aksene. En del elever blander hastighet inn i sin forklaring. En forklaring på dette, kan være at lærebøkene ofte bruker eksempler med grafer som viser hastighet i forhold til tid. En annen er at hastighet her blir brukt i selve oppgaveteksten (situasjonen) og at elevene ikke klarer å løsrive seg fra situasjonen.

Det viser seg spesielt vanskelig for elevene å tilegne seg forståelse for begrep om variable som ikke eksplisitt er gitt av grafen (Leinhardt, 1990). Denne oppgaven er et godt eksempel på det, hvor aksene viser avstand og tid, mens variabelen hastighet er brukt i teksten.

Videre er det vanskelig for mange elever å forholde seg til begrepet varighet; det å tolke en graf og sammenlikne to variable over et tidsintervall (Janvier, 1978, s. 10.19). Dette ser vi også på elevenes begrunnelser. Kun 24,6 % av elevene begrunner sitt valg av graf ut fra begge variablene; avstand fra hjemmet og tid.

Når elevene skal begrunne valg av graf, kan det virke som de ikke ser at enhetene på aksene er avstand hjemmefra og tid. De bruker det i hvert fall ikke i sin forklaring. De begrunner valg av graf ut fra jevn hastighet og ventetiden på postkontoret. Det kan virke som elevene ikke klarer å forholde seg til fart som et abstrakt begrep og at de ikke har klart å danne seg en strukturell forståelse av begrepet graf.

**Figur 4.12 Postkontoret**



**Tabell 4.13 Hvorfor passer grafen best?**

| | | Frequency | Percent | Valid Percent | Cumulative Percent |
|---|---|---|---|---|---|
| Valid | Riktig resonert mhp begge variable | 46 | 21,8 | 26,4 | 26,4 |
| | Riktig resonert mhp tid | 2 | ,9 | 1,1 | 27,6 |
| | Riktig resonert mhp avstand | 7 | 3,3 | 4,0 | 31,6 |
| | ingen forståelse | 49 | 23,2 | 28,2 | 59,8 |
| | Tolker grafen som hastighet | 50 | 23,7 | 28,7 | 88,5 |
| | Grafen som bilde av situasjonen | 5 | 2,4 | 2,9 | 91,4 |
| | Viser forståelse, men forklarer ikke med avstand og tid | 15 | 7,1 | 8,6 | 100,0 |
| | Total | 174 | 82,5 | 100,0 | |
| Missing | Missing | 37 | 17,5 | | |
| Total | | 211 | 100,0 | | |

I oppgave 7 testes elevene i å sette opp et algebraisk uttrykk ut fra en kjent situasjon. Jamfør celle 3 (og delvis 8) i Janviers tabell: Fra situasjon til formel.

**Oppgave 7**

En ungdomsklubb leier ut lokalene sine til skolefester. De som leier, må betale en grunnleie på kr 600 pluss et tillegg på kr 125 per person som deltar. Finn et funksjonsuttrykk for de samlede kostnadene K når det deltar x personer.

Hvilket funksjonsuttrykk er korrekt? (Sett et kryss)

| | | | |
|---|---|---|---|
| ☐ $K(x) = 600x + 125$ | ☐ $K(x) = 725 + x$ | ☐ $K(x) = 600 – 125x$ | ☐ $K(x) = 125x + 600$ |

**Tabell 4.14 Hvilket funksjonsuttrykk passer best for kostnadene til skolefesten?**

| | | Frequency | Percent | Valid Percent | Cumulative Percent |
|---|---|---|---|---|---|
| Valid | K(x)=600x+125 | 21 | 10,0 | 10,0 | 10,0 |
| | K(x)=725 + x | 2 | ,9 | 1,0 | 11,0 |
| | K(x)=600-125x | 12 | 5,7 | 5,7 | 16,7 |
| | K(x)=125x+600 | 174 | 82,5 | 83,3 | 100,0 |
| | Total | 209 | 99,1 | 100,0 | |
| Missing | Missing | 2 | ,9 | | |
| Total | | 211 | 100,0 | | |

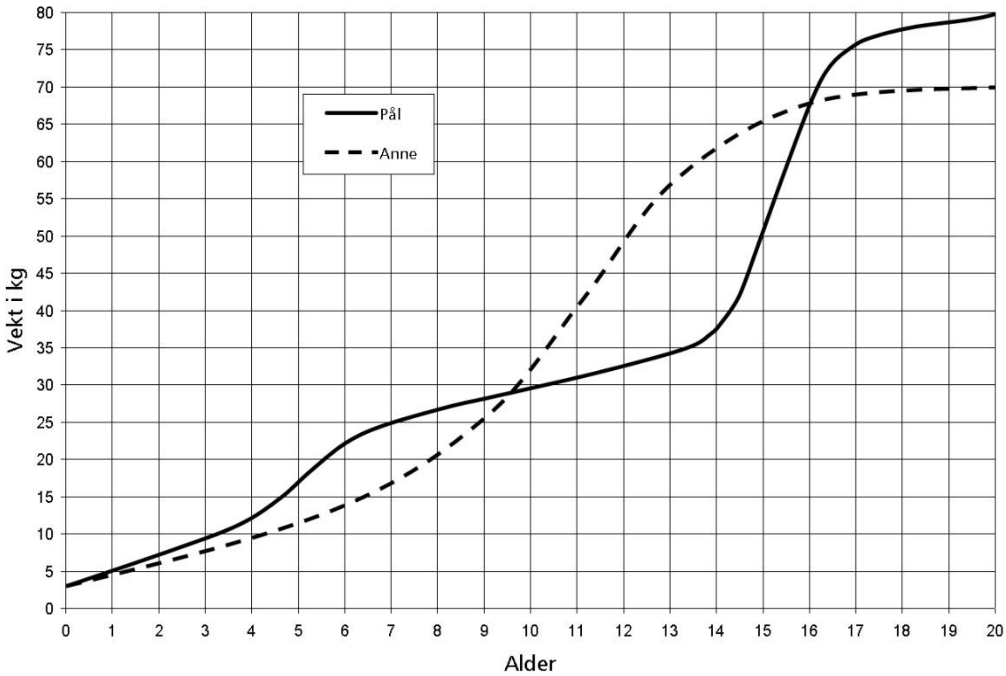
Her har 82,5 % av elevene svart riktig. Hele 10 % svarer alternativ 1, hvor de har byttet om på stigningstall og konstantledd. Det kan være at de ikke har lest teksten nøye nok og valg det første alternativet hvor de kjenner igjen de to tallene brukt i teksten. 5,7 % av elevene har svart alternativ 3. Elevene som har gitt dette svaret, kan ha misforstått teksten og tenkt at grunnleia dekkes av prisen per person som deltar.

I denne oppgaven blir elevene bedt om å utlede en formel fra en situasjon, noe som kan være krevende. Selve situasjonen som beskrives her er såpass enkel og oversiktelig at det ikke bør by på de store utfordringene. Elevene må kjenne til begrepene stigningstall og konstantledd og kjenne den generelle formen for en lineær likning.

I følge Sfard (1992) kan et algebraisk uttrykk både sees på som en strukturell relasjon mellom to variable størrelser og det kan sees på som en prosess (operasjonelt). Tegner vi grafen til dette uttrykket får vi en strukturell representasjon. Uten å intervjue elevene er det her vanskelig å bestemme om de har en strukturell eller operasjonell forståelse.

Den neste oppgaven tester elevenes forståelse av stigningstall. De skal sammenlikne stigningstallet til to grafer i et bestemt punkt. Jamfør celle 7 i Janviers tabell: Fra graf til situasjon. Mange elever har problemer med å skille mellom verdien til en variabel og økningen til variabelen (Janvier, 1978, s. 5.7). Høy verdi forveksles ofte med størst stigning. Det viser seg for mange elever å være vanskelig å danne en abstrakt idé om selve økningen av verdien til en variabel (Janvier 1978, s. 5.10).

**Oppgave 8**




Diagrammet viser hvordan vekten til Pål og Anne øker fra fødsel til de er 20 år. Hvem av de to vokser raskest når de er 15 år? ________________________

Å finne verdien til en variabel i et punkt (konkret) krever at eleven klarer å lese av verdier på grafen (operasjonell forståelse), mens det å finne stigningen til grafen i et punkt blir mer abstrakt og noe som ikke alle elevene mestrer. Det kreves at eleven har evne til å behandle stigningstallet til en graf i et vilkårlig punkt som et abstrakt begrep. Noe som krever at elevene har forståelse på et høyere nivå, at de har strukturell forståelse.

Forklaringen på at mange elever har denne misoppfatningen, *høyest på grafen betyr størst stigning*, kan være måten dette stoffet blir undervist på. Den tradisjonelle tilnærmingen er at elevene blir bedt om å konstruere grafer ved å plotte punkter fra en verditabell. Elevene utvikler operasjonell forståelse (Sfard, 1992). Denne prosessen former elevenes syn på grafer og kan føre til at de ser på grafen som en samling med punkter (Janvier, 1978). Elevene får et snevert syn på grafer og de lærer seg ikke å se sammenhenger. Elevene får en svak begrepsforståelse og de ser på stigningstall som noe konkret og ikke abstrakt. De oppnår ingen strukturell forståelse (Sfard, 1992).

Mentale strukturer dannes gjennom internalisering av hva man utfører. Elevene utvider de mentale strukturene som allerede er der gjennom erfaring. Dersom eleven ikke har jobbet nok med stoffet eller bare pugget algoritmer uten forståelse (hukommelsesstrategier, Elstad og Turmo, 2006), vil denne strukturen bli lite hensiktsmessig.

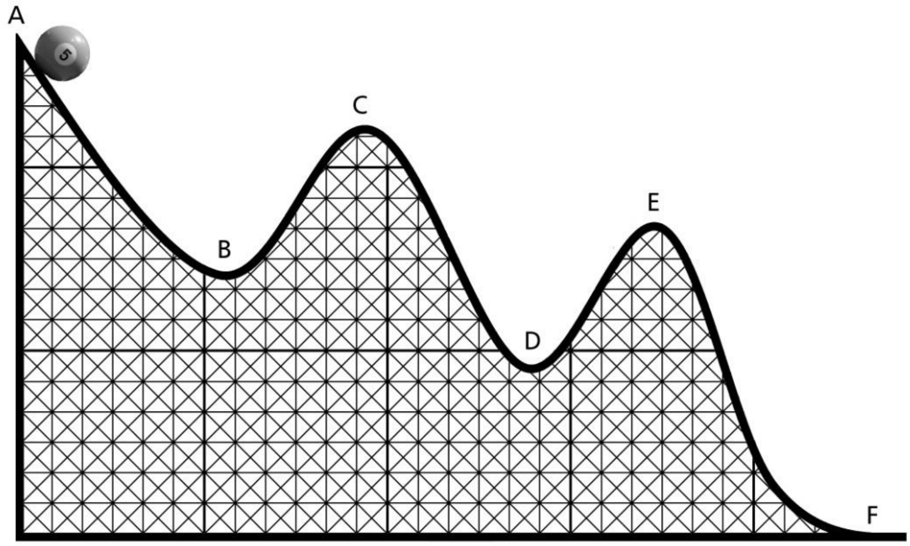
**Tabell 4.15 Hvem vokser raskest?**

| | | Frequency | Percent | Valid Percent | Cumulative Percent |
|---|---|---|---|---|---|
| Valid | Pål | 168 | 79,6 | 82,0 | 82,0 |
| | Anne | 37 | 17,5 | 18,0 | 100,0 |
| | Total | 205 | 97,2 | 100,0 | |
| Missing | Missing | 6 | 2,8 | | |
| Total | | 211 | 100,0 | | |

79,6 % svarer riktig på denne oppgaven, mens 17,5 % kan antas har misoppfatningen ”høy verdi gir størst stigning” og dermed tror de at Anne vokser raskest.

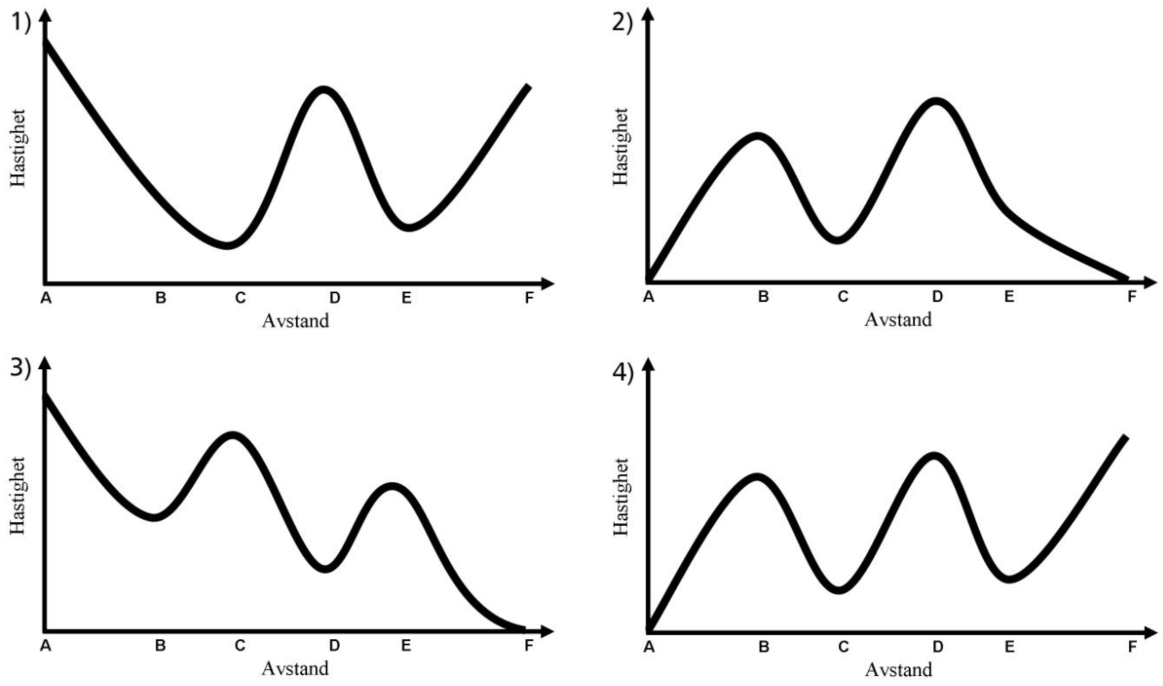
I den neste oppgaven skal elevene bestemme graf ut fra et bilde/en situasjon. Jamfør celle 2 i Janviers tabell: Fra situasjon til graf. De skal finne den grafen som best viser hastigheten til kula og tester strukturell forståelse. Situasjonen er ikke tidsbestemt. Her brukes hastighet og avstand som enheter på aksene. Tidsuavhengige situasjoner er ofte vanskeligere for elevene (Romberg, Fennema & Carpenter, 1993). Når vi har flere variable som tid, fart og avstand og vi bruker fart og avstand som enheter på aksene, skaper dette ofte et problem for elevene.

**Oppgave 9**




En kule triller fritt langs banen som er vist over.

Under er det skissert fire ulike grafer. Hvilken av disse mener du best viser hvordan hastigheten til kula varierer fra den slippes på toppen av bana (A) til den når endepunktet (F).




| | |
|---|---|
| Svar: | |

**Tabell 4.16 Hvilken graf beskriver best kulas hastighet?**

| | | Frequency | Percent | Valid Percent | Cumulative Percent |
|---|---|---|---|---|---|
| Valid | Graf 1 | 6 | 2,8 | 2,8 | 2,8 |
| | Graf 2 | 18 | 8,5 | 8,5 | 11,4 |
| | Graf 3 | 48 | 22,7 | 22,7 | 34,1 |
| | Graf 4 | 139 | 65,9 | 65,9 | 100,0 |
| | Total | 211 | 100,0 | 100,0 | |

Fra tabell 4.16 ser vi at 22,7 % svarer graf 3. Disse elevene kan ha misoppfatningen *grafen som et bilde av situasjonen*. Kula triller nedoverbakke fra A til B, deretter oppover til C. Graf 1 og 3 starter høyt oppe på y-aksen, som betyr at kula starter med høy hastighet. Elever som har svart disse alternativene forholder seg antakeligvis kun til en variabel, avstand som er avmerket langs x-aksen, og de tolker grafen som et bilde av selve bana. Kun 65,9 % av elevene svarer graf 4 som er den riktige, det betyr at mange av elevene har problemer med å tolke grafen hvor avstand og hastighet er enheter på aksene.

For å kunne tolke en graf, må elevene klare å se på grafen som noe strukturelt og ikke være opptatt av detaljene i selve situasjonen (Janvier, 1978). Elevene som ser på grafen som et bilde av situasjonen har fokus på hvordan ting forandres, og overser hva som forandrer seg (Sierpinska, 1992).

Er det noen sammenheng mellom svarene elevene gir? For å være sikre på om vi her har en reel misoppfatning, må vi sjekke om elevene svarer konsekvent. Ved å sette filter på oppgave 5 (i SPSS), er det kun de besvarelsene hvor elevene har krysset av på enten alternativ 5 eller 6 som tas med når frekvens tabell fra oppgave 9 blir valgt.

**Tabell 4.17 Hvilken graf beskriver best kulas hastighet?**

| | | Frequency | Percent | Valid Percent | Cumulative Percent |
|---|---|---|---|---|---|
| Valid | Graf 1 | 3 | 5,6 | 5,6 | 5,6 |
| | Graf 2 | 2 | 3,7 | 3,7 | 9,3 |
| | Graf 3 | 24 | 44,4 | 44,4 | 53,7 |
| | Graf 4 | 25 | 46,3 | 46,3 | 100,0 |
| | Total | 54 | 100,0 | 100,0 | |

Av de elevene som har svart alternativ 5 eller alternativ 6 på oppgave 5 (grafen som et bilde av situasjonen), er det 44,4 % som også har svart alternativ 3 på oppgave 9. Det vil si at 24 av i alt 211 elever (11 %) kan antas å ha denne misoppfatningen. Det kan dermed tyde på at en del elever veksler mellom å se på grafen som noe symbolsk og abstrakt og som et bilde av selve situasjonen (Janvier, 1978, s. 10.10).

**Tabell 4.18 Sammenstilling av oppgave 5 og 9 i pivot tabell**

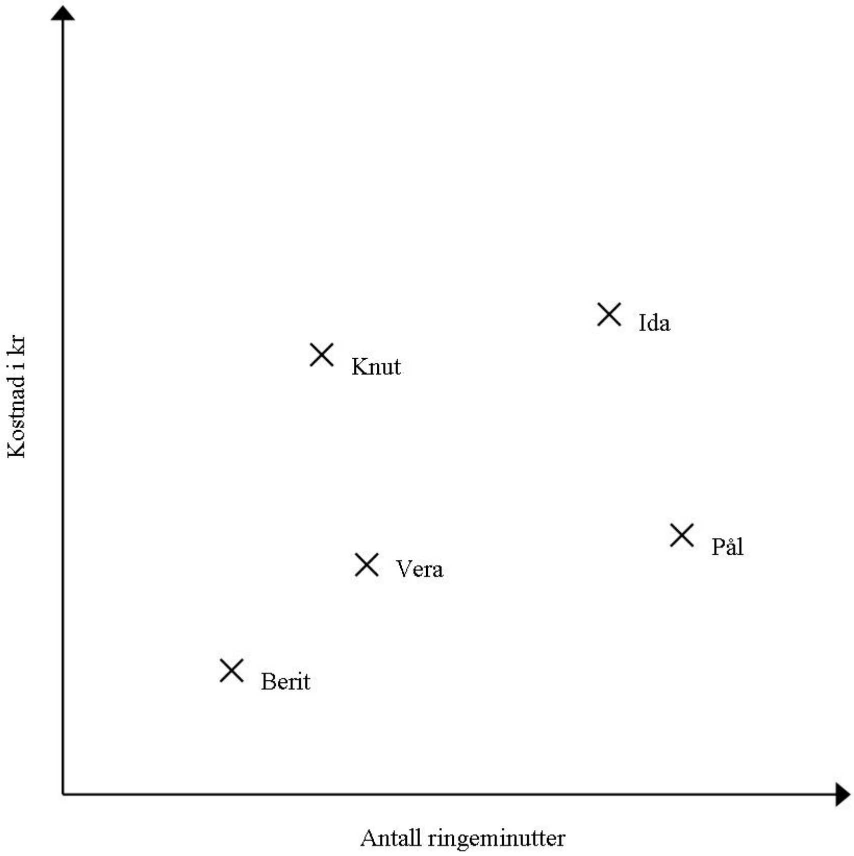
| | | Kule triller fritt | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Graf 1 | Graf 2 | Graf 3 | Graf 4 | Total |
| Fartsetappe | Graf 1 | 0 | 1 | 4 | 2 | 7 |
| | Graf 2 | 0 | 3 | 6 | 7 | 16 |
| | Graf 3 | 2 | 0 | 0 | 6 | 8 |
| | Graf 4 | 1 | 12 | 14 | 98 | 125 |
| | Graf 5 | 2 | 2 | 12 | 21 | 37 |
| | Graf 6 | 1 | 0 | 12 | 4 | 17 |
| Total | | 6 | 18 | 48 | 138 | 210 |

Vi kan her se hvor mange elever som har svart ”starter med høy hastighet” både på oppgave 9 og oppgave 5 (totalt 19). I tillegg ser vi at det er 12 elever som har misoppfatningen ”grafen som et bilde av situasjonen” (graf 3 i kulebane og samtidig graf 6 i fartsetappe). Eventuelt 24 elever, dersom vi også regner med graf 5 i oppgave 5 (som bemerket i tabellen over).

Hensikten med neste oppgave er å se hvordan elevene behersker koordinatsystemet. Jamfør celle 7 i Janviers tabell: Fra graf til situasjon. Fremstillingen viser kostnad som en funksjon av antall ringeminutter. For at svarene skal bli riktig, må elevene vurdere både antall ringeminutter og kostnad.

**Oppgave 10.**

Fem elever har hver sin mobiltelefon. De har forskjellig abonnement. Plottene under viser antall ringeminutter og kostnad for hver av dem i løpet av en helg. Vi ser bort fra månedsavgiften/fastprisen på abonnementet.




a) Hvilken elev har ringt mest? ____________

b) Hvilken elev har den største kostnaden? ____________

c) Hvilke elever betaler det samme pr ringeminutt? ____________

d) Hvilken elev betaler mest pr ringeminutt? ____________

**Tabell 4.19 Hvem har ringt mest?**

| | | Frequency | Percent | Valid Percent | Cumulative Percent |
|---|---|---|---|---|---|
| Valid | Pål | 199 | 94,3 | 95,2 | 95,2 |
| | Ida | 8 | 3,8 | 3,8 | 99,0 |
| | Berit | 2 | ,9 | 1,0 | 100,0 |
| | Total | 209 | 99,1 | 100,0 | |
| Missing | Missing | 2 | ,9 | | |
| Total | | 211 | 100,0 | | |

Vi ser at det er få elever som har problemer med å se at Pål har ringt mest. Hele 94,3 % har svart riktig på oppgave 10 a. Av de som har svart feil, så har 3,8 % svart Ida. Dette kan være fordi Ida er ”høyest oppe” i koordinatsystemet og eleven forveksler enhetene på aksene. Oppgaven tester kun operasjonell forståelse hos elevene (Sfard, 1992).

**Tabell 4.20 Hvem har størst kostnad?**

| | | Frequency | Percent | Valid Percent | Cumulative Percent |
|---|---|---|---|---|---|
| Valid | Ida | 195 | 92,4 | 93,8 | 93,8 |
| | Knut | 9 | 4,3 | 4,3 | 98,1 |
| | Pål | 4 | 1,9 | 1,9 | 100,0 |
| | Total | 208 | 98,6 | 100,0 | |
| Missing | Missing | 3 | 1,4 | | |
| Total | | 211 | 100,0 | | |

På oppgave 10 b er det 92,4 % som har svart riktig. 4,3 % har svart Knut. Det kan være at elevene som svarer Knut, tenker at han har størst kostnad i forhold til antall ringeminutter. 1,9 % har svart Pål. Er det slik at de som svarte Pål i oppgave b) svarte Ida i oppgave a)? Det viser seg at denne mistanken var riktig. Elevene forveksler enhetene på aksene (misoppfatning).

**Tabell 4.21 Hvem betaler det samme per minutt?**

| | | Frequency | Percent | Valid Percent | Cumulative Percent |
|---|---|---|---|---|---|
| Valid | Vera og Berit | 76 | 36,0 | 41,1 | 41,1 |
| | Vera, Berit og Ida | 7 | 3,3 | 3,8 | 44,9 |
| | Berit og Ida | 8 | 3,8 | 4,3 | 49,2 |
| | Vera og Knut | 9 | 4,3 | 4,9 | 54,1 |
| | Pål og Berit | 4 | 1,9 | 2,2 | 56,2 |
| | Kun en person | 32 | 15,2 | 17,3 | 73,5 |
| | Vera og Ida | 14 | 6,6 | 7,6 | 81,1 |
| | Ingen | 13 | 6,2 | 7,0 | 88,1 |
| | Vera og pål | 15 | 7,1 | 8,1 | 96,2 |
| | Pål og Knut | 4 | 1,9 | 2,2 | 98,4 |
| | Knut og Ida | 2 | ,9 | 1,1 | 99,5 |
| | Pål og Ida | 1 | ,5 | ,5 | 100,0 |
| | Total | 185 | 87,7 | 100,0 | |
| Missing | Missing | 26 | 12,3 | | |
| Total | | 211 | 100,0 | | |

På spørsmål 10 c er det bare 36 % som svarer riktig. 12,3 % har unnlatt å svare. Elevene synes nok at det er vanskelig å forholde seg til to variable samtidig. 4,3 % svarer Vera og Knut som er omtrent like langt fra ”kostnadsaksen”. Dette er en utberedt misoppfatning blant yngre elever; de sammenligner to variable ved å se på en av dem (Gjone, 1997). Vi kan stille spørsmål ved hvor lett det er å se proporsjonalitet mellom Berit og Vera her.

**Tabell 4.22 Hvem betaler mest per minutt?**

| | | Frequency | Percent | Valid Percent | Cumulative Percent |
|---|---|---|---|---|---|
| Valid | Knut | 145 | 68,7 | 73,6 | 73,6 |
| | Ida | 30 | 14,2 | 15,2 | 88,8 |
| | Pål | 9 | 4,3 | 4,6 | 93,4 |
| | Berit | 7 | 3,3 | 3,6 | 97,0 |
| | Vera | 5 | 2,4 | 2,5 | 99,5 |
| | De betaler like mye | 1 | ,5 | ,5 | 100,0 |
| | Total | 197 | 93,4 | 100,0 | |
| Missing | Missing | 14 | 6,6 | | |
| Total | | 211 | 100,0 | | |

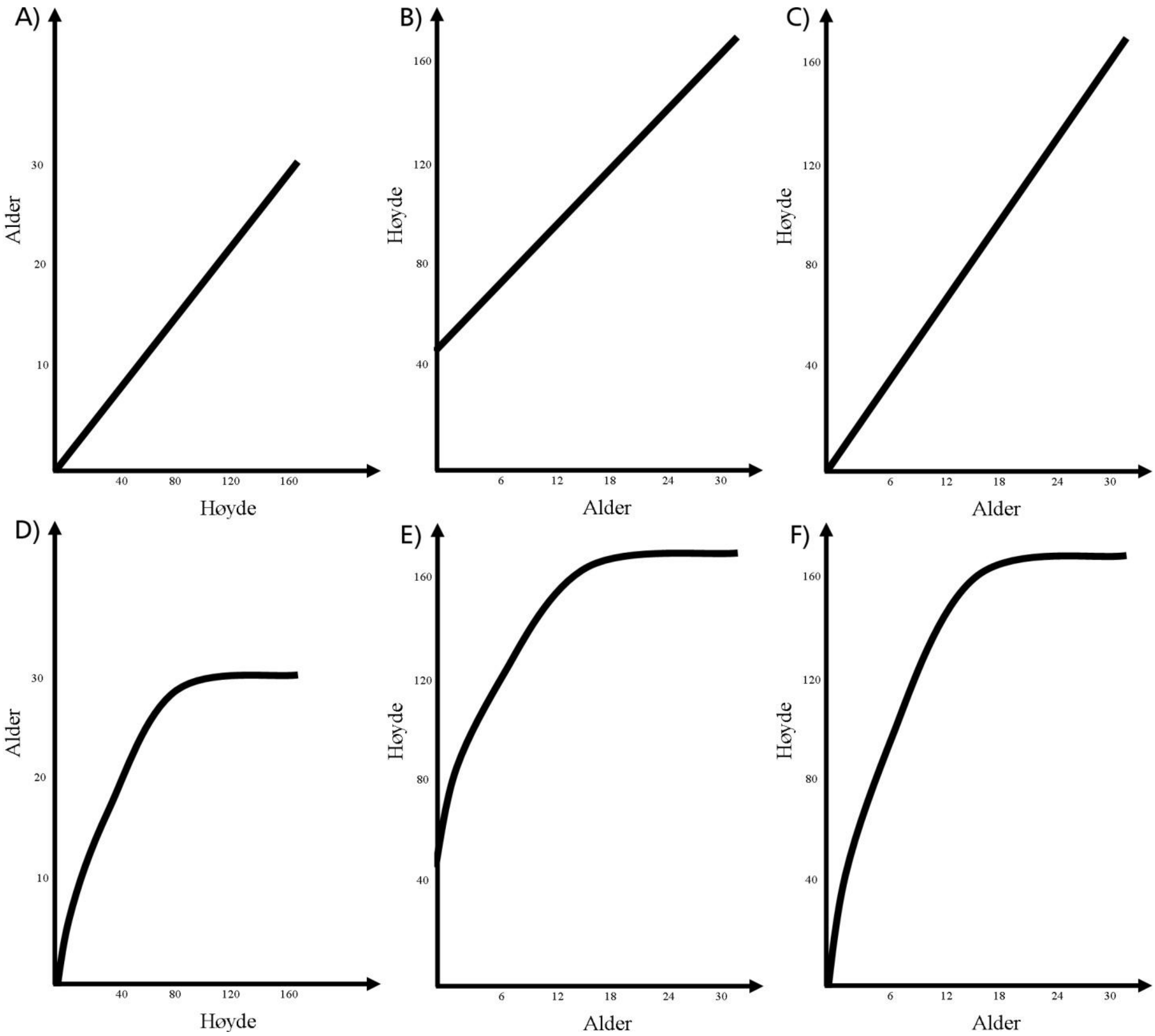
På spørsmålet om hvem som betaler mest pr ringeminutt, er det 68,7 % som svarer riktig. 14,2 % svarer Ida, som er høyest oppe. Misoppfatning som i c. Av de som svarer Vera og Knut i c, er det 50 % som svarer Ida i d. De klarer ikke å kombinere to variable.

En svakhet med oppgaven er at ingen av personene ligger på en vertikal linje, og dermed får jeg ikke frem misoppfatningen ” omtrent like langt fra  kostnadsaksen” så tydelig. En del elever som har denne misoppfatningen har muligens svart ”Ingen”.

Hensikten med oppgave 11 er å teste elevenes evne til å tolke en graf. Jamfør celle 7 i Janviers tabell: Fra graf til situasjon.

**Oppgave 11**

Hvilken av grafene under mener du best viser sammenhengen mellom en persons høyde og alder fra 0 til 30 år?



**Tabell 4.23 Hvilken graf viser best sammenheng mellom en persons høyde og alder?**

| | | Frequency | Percent | Valid Percent | Cumulative Percent |
|---|---|---|---|---|---|
| Valid | Graf A | 8 | 3,8 | 3,8 | 3,8 |
| | Graf B | 8 | 3,8 | 3,8 | 7,7 |
| | Graf C | 6 | 2,8 | 2,9 | 10,5 |
| | Graf D | 21 | 10,0 | 10,0 | 20,6 |
| | Graf E | 102 | 48,3 | 48,8 | 69,4 |
| | Graf F | 64 | 30,3 | 30,6 | 100,0 |
| | Total | 209 | 99,1 | 100,0 | |
| Missing | Missing | 2 | ,9 | | |
| Total | | 211 | 100,0 | | |

Kun 48,3 % svarer riktig. 30,3 % svarer graf F, som starter i origo. Det er en vanlig misoppfatning blant elevene å tro at en graf må starte eller gå igjennom origo. Både grafen i A, C, D og F starter i origo. Til sammen har 46,9 % svart en av disse. Til sammen 10,4 % svarer graf A, B eller C som er rette linje. Disse elevene kan ha misoppfatningen at forholdet mellom alder og høyde må være lineært. På graf A og D er enhetene på aksene byttet om. Elevene som har valgt en av disse (13,7 %) kan ikke ha sett på hvilke enheter vi har på aksene. Ut fra graf A vil en 10 år gammel person være ca 60 cm høy!

Siden det her er gitt enheter på aksene, kreves det kun operasjonell forståelse. Elevene kan lese av verdier på grafen for å bestemme riktig graf.

### 4.2.1 Operasjonell og/eller strukturell kunnskap

Dersom hensikten med en oppgave er å lese av verdier på en graf, trengs kun operasjonell kunnskap. Det samme gjelder oppgaver som kan løses med en kjent algoritme. For eksempel å tegne grafen til en lineær likning. For å kunne løse en slik oppgave, kreves operasjonell kunnskap. Men for å kunne tolke en graf, for å kunne "se" den abstrakte informasjonen, trengs strukturell kunnskap.

Funksjonell matematikkunnskap utvikles både gjennom strukturell (conceptual) kunnskap og operasjonell (procedural) kunnskap. Eleven må være i besittelse av begge disse formene for kunnskap for å oppnå god faglig utvikling. Begrepet *procept* (Gray & Tall, 1994) og er en sammensmelting av de to kunnskapsaspektene "procedural knowledge" og "conceptual knowledge". Begrepet vektlegger den betydning interaksjonen mellom de to kunnskapsaspektene har for utvikling av matematisk kompetanse.

I følge Gray & Tall (1994) er både den operasjonelle og den strukturelle kunnskapen av stor betydning for elevenes utvikling av matematisk kompetanse. Elever som enkelt og fleksibelt forflytter seg mellom objekt- og prosess-lagene har nådd ”*procept*”-laget. Det er i dag enighet om at begge aspektene er viktig med tanke på utviklingen av funksjonell matematikkunnskap (Sfard, 1992; Gray & Tall, 1994).

Det var derfor ønskelig å undersøke om det er noen sammenheng mellom de ulike misoppfatningene elevene har. Er det slik at de elevene som har misoppfatninger som kan knyttes opp mot strukturell forståelse også har misoppfatninger som kan knyttes opp mot operasjonell forståelse? Er det slik at elever med strukturell forståelse også har operasjonell forståelse, eller kan man ha strukturell forståelse uten å ha operasjonell forståelse?

For å kunne svare på dette ble datafilen overført fra SPSS til excel hvor det ble laget pivot-tabeller. Oppgavene fra undersøkelsen ble delt inn i en strukturell og en operasjonell gruppe. Oppgave 1, 2, 3, 7, 10, 11 ble definert som operasjonelle, mens oppgave 5, 6, 8, 9 ble definert som strukturelle. Elever som har mellom 0 og 24 prosent riktig er definert som *dårlig*. Elever som har mellom 25 og 49 prosent riktig er definert som *middels*. 50 til 74 prosent riktig er definert som *bra* og 75 til 100 som *meget bra*. Det er opprettet en tabell for jentene og en for guttene.

**Tabell 4.24 Pivot som viser prosentvis svarfordeling blant jenter**

| Kjønn | Jente |
|---|---|

| Antall av Kandidat | Strukturell | | | |
|---|---|---|---|---|
| Operasjonell | Dårlig | Middels | Bra | Meget bra |
| Dårlig | 5 % | 0 % | 6 % | 1 % |
| Middels | 11 % | 2 % | 8 % | 13 % |
| Bra | 2 % | 2 % | 8 % | 23 % |
| Meget bra | 2 % | 0 % | 5 % | 14 % |

Resultatet viser at 50 % av jentene gjør det *bra* og *meget bra* både på de operasjonelle og de strukturelle oppgavene. 17 % gjør det tilsvarende *middels* og *dårlig*. Det kan tyde på at det er en viss sammenheng mellom de to kunnskapsaspektene. Elever som har operasjonell forståelse har også strukturell forståelse. Og elever som har lite operasjonell forståelse har også lite strukturell forståelse. Det kan tyde på at en liten forbedring i den ene kunnskapskomponenten, fører til en liten forbedring i den andre (Siegler, 1998, i Throndsen 2005).

Men tabellen viser også at 28 % av jentene gjør det *bra* og *meget bra* på oppgaver som tester strukturell forståelse, samtidig som de gjør det *dårlig* og *middels* på oppgaver som tester operasjonell forståelse. Dette kan tyde på at elevene kan opparbeide strukturell forståelse uten en grundig operasjonell forståelse.

**Tabell 4.25 Pivot som viser prosentvis svarfordeling blant gutter**

| | |
|---|---|
| Kjønn | Gutt |

| Antall av Kandidat | Strukturell | | | |
|---|---|---|---|---|
| Operasjonell | Dårlig | Middels | Bra | Meget bra |
| Dårlig | 4 % | 0 % | 1 % | 1 % |
| Middels | 3 % | 0 % | 6 % | 9 % |
| Bra | 1 % | 4 % | 8 % | 27 % |
| Meget bra | 0 % | 0 % | 5 % | 31 % |

Blant guttene er hele 71 % av de som deltok i undersøkelsen innenfor grupperingen *bra* og *meget bra* både på oppgaver som tester operasjonell forståelse og oppgaver som tester strukturell forståelse. Det kan derfor se ut til at det er en klar sammenheng mellom de to kunnskapsaspektene; at ferdighetene øker i takt og dualiteten er tydelig.

Blant guttene er det 17 % som skårer bra på oppgaver som tester strukturell forståelse og samtidig skårer lavt på oppgaver som tester operasjonell forståelse.

Resultatene viser at det er en klar sammenheng mellom strukturell og operasjonell kunnskap hos elevene. Videre kan det tyde på at det er flere elever med god strukturell kunnskap samtidig som de har svak operasjonell kunnskap enn det er elever med god operasjonell kunnskap og svak strukturell kunnskap. Elevene er flinkere til å tolke grafer (celle 2 og 7 i Janvier´s tabell) enn de er til å tegne grafer (celle 5, 9 og 12).

Ut fra disse resultatene kan det se ut som at enkelte elever utvikler strukturell forståelse uten å gå veien om operasjonell forståelse, noe som stemmer dårlig med Anna Sfard (1992) sin teori om objekter og prosesser. Hun er av den formening at veien til strukturell forståelse går via operasjonell forståelse. Dette kan forklares med at elevene i stor grad benytter kalkulator og programvare på pc til å tegne og tolke grafer. Fokus flyttes oppover i betydning høyere abstrakt nivå, fra prosess til objekt og elevene kan, i følge Tall (1991), danne objekter uten å gå veien om å internalisere prosedyrene først.

### 4.2.2 Motivasjon og metakognitive ferdigheter

Schoenfeld (1994) mener at matematikkundervisningen i for liten grad fokuserer på motivasjon. Selv om en elev har tilstrekkelig matematikkunnskap kan lav motivasjon i tillegg til manglende ferdigheter i overvåking føre til at eleven mislykkes i faget.

Jeg ønsker å finne ut om det er noen sammenheng mellom hvor godt en elev liker faget og hvor reflektert han er over egen læring.

**Tabell 4.26 Sammenheng mellom hvor godt en elev liker faget og hvor reflektert han er.**

| | | Hvor godt liker du faget? | Metakognisjon |
|---|---|---|---|
| Hvor godt liker du faget? | Pearson Correlation | 1 | ,489(**) |
| | Sig. (2-tailed) | | ,000 |
| | Sum of Squares and Cross-products | 260,424 | 113,376 |
| | Covariance | 1,246 | ,542 |
| | N | 210 | 210 |
| Metakognisjon | Pearson Correlation | ,489(**) | 1 |
| | Sig. (2-tailed) | ,000 | |
| | Sum of Squares and Cross-products | 113,376 | 206,424 |
| | Covariance | ,542 | ,988 |
| | N | 210 | 210 |

** Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Vi kan ut fra tabellen se at det er en klar sammenheng mellom hvor godt elevene liker faget og hvor reflektert de er over egen læring (metakognisjon). Korrelasjonen er signifikant på 0,01 nivå. Med et signifikansnivå på 1 % kan vi si at forskjellen ikke skyldes tilfeldigheter. Det vil si at vi med en sikkerhet på 99 % kan si at de elevene som er motiverte og liker faget godt også er reflekterte over egen læring.

**Tabell 4.27 Sammenheng mellom hvor godt en elev gjør det i faget og hvor reflektert han er.**

| | | Metakognisjon | Hvor godt gjør du det i faget? |
|---|---|---|---|
| Metakognisjon | Pearson Correlation | 1 | ,239(**) |
| | Sig. (2-tailed) | | ,001 |
| | Sum of Squares and Cross-products | 206,424 | 50,756 |
| | Covariance | ,988 | ,244 |
| | N | 210 | 209 |
| Hvor godt gjør du det i faget? | Pearson Correlation | ,239(**) | 1 |
| | Sig. (2-tailed) | ,001 | |
| | Sum of Squares and Cross-products | 50,756 | 219,608 |
| | Covariance | ,244 | 1,056 |
| | N | 209 | 209 |

** Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

**Tabell 4.28 Sammenheng mellom hvor godt en elev liker faget og hvor godt han gjør det i faget.**

| | | Hvor godt gjør du det i faget? | Hvor godt liker du faget? |
|---|---|---|---|
| Hvor godt gjør du det i faget? | Pearson Correlation | 1 | ,559(**) |
| | Sig. (2-tailed) | | ,000 |
| | Sum of Squares and Cross-products | 219,608 | 132,359 |
| | Covariance | 1,056 | ,636 |
| | N | 209 | 209 |
| Hvor godt liker du faget? | Pearson Correlation | ,559(**) | 1 |
| | Sig. (2-tailed) | ,000 | |
| | Sum of Squares and Cross-products | 132,359 | 260,424 |
| | Covariance | ,636 | 1,246 |
| | N | 209 | 210 |

** Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Videre ser vi at det også er en klar sammenheng mellom hvor godt elevene liker faget og hvor godt (ut fra egen vurdering) de gjør det i faget og mellom hvor reflektert de er over egen læring og hvor godt de gjør det i faget.

Dette støtter opp under Schoenfeld (1994) sine antagelser om at metakognitive ferdigheter sammen med motivasjon for faget er vesentlig for hvor godt en elev kommer til å gjøre det i faget.

#### 4.2.3 Oppsummering kvantitativ undersøkelse

Undersøkelsen viser at en stor andel av elevene har problemer med å gjøre om fra algebraisk uttrykk til graf. I disse oppgavene var det mange ulike svar, noe som tyder på stor usikkerhet hos elevene. Tilsvarende mange hadde også problemer med å gå fra graf til algebraisk uttrykk. Det viser seg at det er forholdsvis mange som sliter med tolking av grafer som viser til bestemte situasjoner. Det å koordinere og se relasjoner mellom en situasjon og en graf og relasjoner mellom to variable i en graf er for mange elever problematisk. Elever som ikke har nådd abstrakt nivå, som ikke klarer å forholde seg til en graf som et objekt, har en tendens til å behandle grafen som et bilde av situasjonen. Videre fant vi at en del elever har problemer med å bestemme hvor en graf vokser mest (finne stigningstall). Høyest på grafen forveksles med størst stigning.

Det kan videre se ut som at det er en sammenheng mellom en elevs strukturelle og operasjonell kunnskap. En elev som har opparbeidet operasjonell kunnskap har også i stor grad strukturell kunnskap. Vi ser samtidig en antydning til at enkelte elever har god strukturell kunnskap uten å ha spesielt god operasjonell kunnskap.

Undersøkelsen viser også at det er en sammenheng mellom hvor motivert og reflektert en elev er og hvor godt han gjør det i faget.

#### 4.2.4 Svakheter ved undersøkelsen

For å kunne si at en elev har en misoppfatning, må eleven være konsekvent i sine svar. En feil en elev gjør kan være tilfeldig. Bak en misoppfatning ligger en ide om sammenheng som eleven bruker konsekvent. I undersøkelsen var det muligens ikke mange nok oppgaver som testet det samme til å avdekke om ene elev hadde en reell misoppfatning. Men man kan bruke dataene til å si noe om tendensene i utvalget.

### 4.3 Kvalitativ undersøkelse

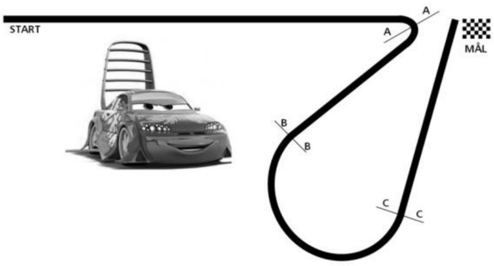
For å utdype enkelte interessante funn, har jeg foretatt intervju av noen elever. Jeg lagde et nytt spørreskjema med de tre oppgavene: Fartsetappe, Postkontor og Kulebane. Til hver av oppgavene la jeg til et felt hvor elevene skulle begrunne svarene sine; hvorfor de valgte nettopp den grafen de gjorde. Det nye spørreskjemaet ble brukt i 3 av de klassene som var med på først runde av undersøkelsen. Elevene skrev navn på skjemaet, slik at jeg kunne finne tilbake til de elevene som hadde en misoppfatning. Gjennom samtalen ble elevene konfrontert med sine svar (konfliktorientert dialog).

Navnene som er brukt i teksten under er ikke identiske med deres virkelige navn.

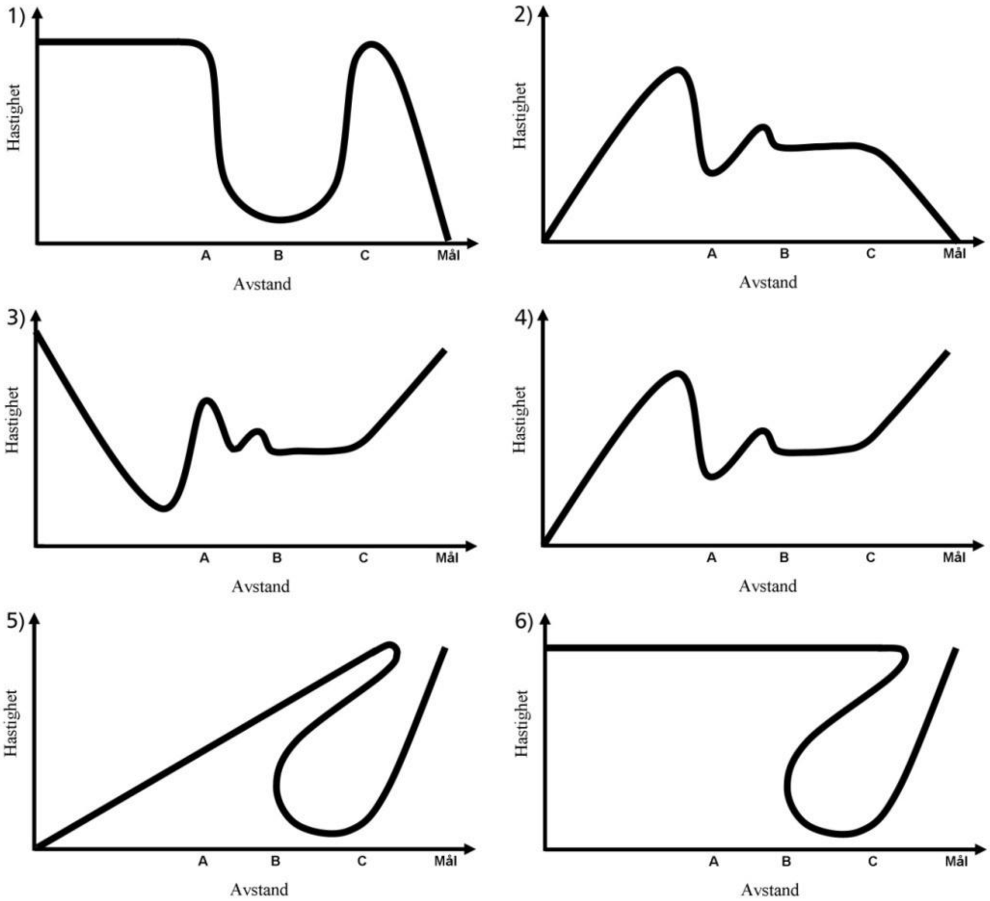
#### 4.3.1 Elevenes begrunnelser for valg av graf

Her vil jeg vise til en del av elevenes begrunnelser for valg av graf. Disse begrunnelsene forteller noe om elevene har operasjonell eller strukturell forståelse. Noen av elevene har jeg intervjuet i etterkant og kommentarer fra noen av disse intervjuene er også tatt med.

#### 4.3.1.1 Oppgave 1. Fartsetappe.




Hvilken av grafene under mener du beskriver hastigheten til bilen best?



**Graf 1:**

I følge denne grafen kommer bilen i stor hastighet inn til start og hastigheten er jevn helt fram til svingen i A. Der bremser bilen kraftig ned til den nesten når punktet B hvor den så akselererer kraftig frem til C for så å bremse ned på den rette strekningen frem til mål. Bilen stopper på målstreken. Dette gir overhodet ingen mening.

Svar:
Hastigheten er stor i begynnelsen, men sakker under svingen og øker etter svingen igjen.

**Elevsvar 1: Lises svar til oppgave 1, fartsetappe.**

Denne eleven har svart graf 1, men ut fra forklaringen kan det virke som eleven har større forståelse for det abstrakte begrepet fart enn valg av graf skulle tilsi. Men i samtalen med Lise i etterkant forklarer hun det slik: ”Bilen kjører med jevn, stor fart fra start og bremser mot svingen. Så kjører den nedoverbakke fra A til B”. Eleven har fokus på detaljene i selve situasjonen (fartsetappen). Elever med stor fokus på situasjonen tegner ofte et bilde av selve hendelsesforløpet (Janvier, 1978).

**Graf 2:**

Denne grafen gir et riktig bilde av farten til bilen helt frem til punkt C. Herfra viser grafen at bilen bremser ned og parkerer på målstreken.

Svar:
Jeg synes graf nr 2 ser mest passende ut. Siden bilen starter på null og går opp og ned slik løypa svinger. og når du er ferdig vil jeg tro bilen stopper og da blir farten 0 igjen.

**Elevsvar 2: Hildes svar til oppgave 1, fartsetappe.**

Svar: Fordi han stopper tilslutt og farten vil gå ned. Når han svinger vil svingingen variere og derfor blir blir det en ujevn graf.

**Elevsvar 3: Annes svar til oppgave 1, fartsetappe.**

Formuleringer som: "Grafen går opp og ned slik løypa svinger" og "når han svinger vil svingen variere og derfor blir det en ujevn graf" gir uttrykk for at elevene er opptatt av detaljer i selve situasjonen. De bruker ikke enheter langs aksene til å begrunne valg av graf.

Svar: Der den rikktige grafen, fordi at bilen starter fra 0, går framover, bremser i punkt a, får litt hastighet for punkt B, Også går det [illegible] til C, før bilen gasser for fullt. derretter senker den ned og stopper i mål.

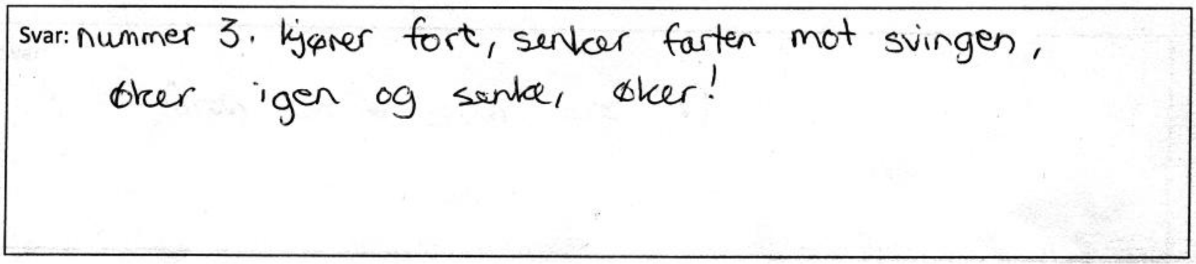
**Elevsvar 4: Nils svar til oppgave 1, fartsetappe.**

Denne eleven har en viss forståelse av selve hendelsesforløpet. Forklarer riktig med hensyn til farten fra start og nedbremsing i svingene, men når bilen nærmer seg mål, bremser den opp for til slutt å stoppe helt: "bilen stopper i mål."

Når elevene som hadde svart dette alternativet ble konfrontert med oppgaven i etterkant, og da spesielt farten til bilen når den passerer målstreken, så de raskt at denne grafen ikke passet og at graf 4 måtte være den riktige.

### Graf 3:

Også denne grafen viser til en bil som har høy hastighet fra start (høyt oppe på y-aksen). Videre så bremser den ned i god tid før svingen i A. Innen bilen når svingen i A har den kommet opp i høy hastighet igjen. Fra punkt B har grafen en fasong som ser temmelig riktig ut hvor hastigheten øker mot mål.


Svar: nummer 3. kjører fort, senker farten mot svingen, øker igen og senke, øker!

**Elevsvar 5: Karis svar til oppgave 1, fartsetappe.**

Jeg ønsker å finne ut hvordan en elev som velger en graf hvor bilen har høy hastighet fra start tenker.

**Samtale med Kari.**

Eleven virket litt utilpass og ikke helt fortrolig med situasjonen.

K: ”Har jeg svart galt?” Hun peker på graf 5 og spør ”Er det den da?”

Jeg ba henne om å se på den grafen hun først hadde svart, graf 3.

L: ”Kan du ut fra grafen forklare meg hvorfor du mener denne passer best til fartsetappen på figuren over?”.

K: ”Bilen kjører fort frem til A og da må den bremse ned før svingen.”

L: ”Hvis du ser på grafen, når er farten lavest?”

L: ”Hvordan er farten til bilen i punktet A?”

Eleven ser av grafen at farten er på vei opp igjen lenge før bilen kommer til svingen i A og begynner å lete etter en annen graf som passer bedre.

L: ”Hva vet vi om farten til bilen på START?”

K: ”Bilen står stille.”

L: ”Se en gang til på den grafen du mente passet best. Kan du si noe om farten til bilen når den starter?”

K: ”Denne er den riktige”, sier hun og peker på graf 4. ”Her starter farten til bilen på null.”

I denne samtalen bruker ikke Kari lang tid på å se at det svaret hun hadde gitt ikke stemte. Hun hadde ikke sett nøye på x-aksen og de punktene som var avmerket der. Hun forholdt seg kun til den ene variabelen; hastighet langs y-aksen. Ved å få Kari til å forholde seg til variabelen avstand i tillegg til hastighet, oppdaget hun raskt at noe ikke stemte. Ved å konfrontere henne med hastigheten ved start, innså hun raskt at det svaret hun hadde gitt umulig kunne passe. Hun svarte raskt at graf 4 måtte være den riktige grafen. Eleven tenkte at bilen kunne kjøre med høy hastighet frem til første sving, hun hadde stor fokus på detaljene i selve fartsetappen (situasjonen) og forholdt seg i mindre grad til grafen og enhetene på aksene. En bil som står på startstreken må nødvendigvis ha hastighet lik null.

Bilen har høy hastighet fra start. Bremser ned og akselererer igjen før svingen i A og akselererer mot mål. Problemet er at elevene ikke bruker enhetene på x-aksen nøyaktig. Når de blir gjort oppmerksom på det, ser de raskt at denne grafen ikke passer. Når elevene blir spurt etter hastigheten til bilen på start-streken, ser de fleste raskt at denne grafen ikke kan passe.

Ved å stille noen konfronterende spørsmål, oppdaget elevene raskt at deres antagelser ikke holdt og de fant fort frem til riktig graf.

**Svar alternativ 6:**

Denne grafen har samme utseende som selve fartsetappen (grafen som bilde av situasjonen). En tolkning av grafen blir da at bilen kjører med høy hastighet fra start. Kjører så med konstant fart frem til punkt C. Derfra synker farten kraftig og avstanden til start reduseres (bilen kjører tilbake til B) og så øker farten igjen mot mål.

Svar: Jeg synes graf 6 beskriver hastigheten best. Fordi strekningen til A er rett og har ingen hindringer, så derfor går det fortere enn til strekning B som har en sving og C som har to svinger.

**Elevsvar 6: Håkons svar til oppgave 1, fartsetappe.**

Svar: Nummer 6.
Fordi det er den samme modellen som på eksempelet og fordi den først er konstant, dermed synker og så stiger igjen

**Elevsvar 7: Eriks svar til oppgave 1, fartsetappe.**

Dette er eksempler på elever som har misoppfatningen *grafen som et bilde av situasjonen.* Begge disse elevene har i følge Janvier (1978) en *lokal forvirring*. De bestemmer graf ut fra bildet av situasjonen og grafen må passe med detaljene i figuren. Rette strekninger i fartsetappen må gi rette linjer på grafen. Elevene har ikke evne til å se på grafen som noe abstrakt og har ingen strukturell forståelse.

**Samtale med Erik:**

L: ”Hvorfor mener du graf 6 passer best?”

E: ”Den følger farten til bilen i figuren. Den holder samme fart; kjører med jevn hastighet frem til svingen, så må den bremse ned og så kjører den med jevn fart frem til mål.” Fingeren følger grafen mens han forklarer.

L: ”Har du sett på hvilke enheter vi har på aksene?”

E: ”Hva mener du?”

L: ”Hva viser y-aksen?”. ”Hvilke verdier har vi på y-aksen?”

E: ”Ja…, det er hastigheten…” drar litt på det. Litt usikker på hva jeg er ute etter.

L: ”Hva er hastigheten til bilen når den står på startstreken?”

E: ”Åja, da står den rolig. Da må det være graf 5 som er riktig”.

L: ”Ok, prøv å forklare billøpet ut fra grafen i figur 5”.

E: ”Bilen starter med hastighet lik null og øker jevnt helt til svingen. Så må den bremse ned og øker igjen mot mål.”

L: ”Hvis du ser på grafen, når bremser bilen ned?”

E: ”Her”, og peker på svingen (toppunktet).

L: ”Hvis du ser på x-aksen, hvor langt har bilen kommet i løpet da?”

E: ”Hva mener du?”

Jeg prøver å få eleven til å forholde seg til enheten på x-aksen også. Foreløpig ser han kun på hastigheten og ikke avstanden.

L: ”Hva er enheten langs x-aksen? Hva viser x-aksen?”

E: ”Avstand…”

L: ”Riktig!” ”Når bremser bilen ned ut fra graf 5?” ”Hvor langt har bilen kommet i fartsetappen da?”

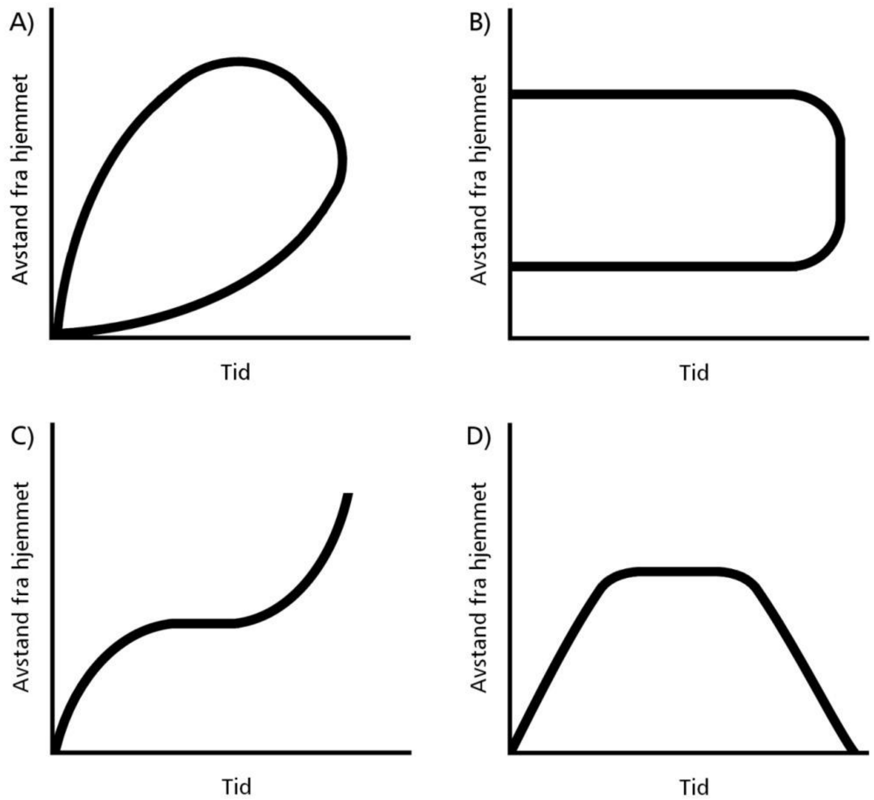
E: ”Åh, da har jeg svart feil på alle oppgavene”. Eleven ser på graf 2 og 4 og finner ut at det må være graf 4 som er den riktige.

Under denne samtalen bruker eleven forholdsvis lang tid på å få noe mening ut av selve grafen. Han forholder seg ikke til enhetene langs aksene har stor fokus på detaljene i situasjonen/fartsetappen.

#### 4.3.1.2 Oppgave 2. Postkontoret.

Hanne skal gå til postkontoret for å levere en pakke. Hun går hjemmefra med jevn hastighet. På postkontoret må hun stå i kø før hun blir ekspedert. Deretter går hun hjem med samme hastighet.

Hvilken av grafene under mener du beskriver turen til Hanne best?




**Graf A:**

Graf A er et typisk eksempel på hvordan enkelte elever tolker en graf som et kart. Eksempler på elevenes begrunnelse for valg av denne grafen er: ”Hanne ender opp i samme punkt som hun starer; det betyr at hun kommer hjem igjen.” ”Hun går med jevn fart til postkontoret, går så litt saktere og deretter med samme jevne fart tilbake.” ”Det er like langt tilbake langs x-aksen fra der hun snur. Det vil si, hun bruker like lang tid til postkontoret som hjem igjen.”

Mange elever forholder seg kun til y-aksen, avstanden hjemmefra, og ser ikke at tiden reverserer. Eleven ser på grafen som et slags kart, hvor hun kommer tilbake til utgangspunktet.

| | |
|---|---|
| Svar: | A |
| Hvorfor passer denne best? | Fordi hun skal jo til samme plass som hun gikk fra. |

**Elevsvar 1: Karianne svar til oppgave 2, postkontor.**

Karianne tolker grafen som et kart. Hun forholder seg ikke til enhetene på aksene når hun skal gi en forklaring. Den *spontane læringen* kan være en hindring på veien mot begrepsdannelse og kan være en av forklaringene til at noen elever tolker en graf som et kart (Vygotsky, 2001).

Svar: A) fordi grafen viser avstand samtidig som den kommer tilbake.

**Elevsvar 2: Kjetils svar til oppgave 2, postkontor.**

Kjetil bruker kun variabelen avstand til å forklare valg av graf. Hanne går til postkontoret og kommer hjem igjen til utgangspunktet; origo. Grafen tolkes som et kart. At tiden reverserer, tenker han ikke over.

Svar: Nummer A:
Fordi hun starter i origo og går så og så langt før det jevnes mer ut og deretter krapper linjen seg om igjen. Altså, da hun er på tur hjem. Hun ender opp i samme punkt hvor hun startet, som er hjemme

**Elevsvar 3: Eriks svar til oppgave 2, postkontor.**

Også Erik ser kun på den ene variabelen; avstand langs y-aksen. Grafen blir tolket som et kart hvor Hanne skal hjem igjen etter turen til postkontoret. Eleven har stor fokus på detaljer i selve grafen og bruker dette til å forklare valg av graf.

**Samtale med Erik:**

L: ”Hvorfor beskriver graf A turen til Hanne best?”

E: ”Hun går hjemmefra, oppover her”. Finger følger grafen. ”Så er hun på postkontoret og må stå i kø, da jevnes linjen ut her, og så går hun hjem igjen tilbake hit hvor hun startet”. Han peker i origo.

L: ”Hva er enheter på aksene her? Hva viser x- og y-aksen oss?”

Eleven svarer ikke. Han sitter nok og tenker på hva han har svart feil. I denne samtalen tar det lang tid før eleven kommer frem til riktig graf. Han forsøker seg på alle grafene før valget til slutt ender på den riktige. Han sliter med å forholde seg til to variable samtidig. I tillegg forvirrer det eleven at situasjonen er beskrevet med hastighet, en variable som ikke eksplisitt er gitt ved grafen.

**Graf B:**

Elevene som svarer denne grafen klarer verken å forholde seg til x- eller y-aksen. Der grafen er horisontal er avstanden fra hjemmet uforandret og der elevene mener Hanne står stille på postkontoret, står tiden stille og avstanden til hjemmet blir mindre. På den delen av grafen hvor de mener Hanne går med jevn fart hjem igjen, reverserer tiden og avstanden til hjemmet er uforandret. Hanne verken starter eller avslutter turen hjemme.

| | |
|---|---|
| Svar: | B. |
| Hvorfor passer denne best? | Fordi hun går i samme hastighet fram og tilbake, og de strekene er like lange. "Bua" viser at hun står i kø. |

**Elevsvar 4: Heidis svar til oppgave 2, postkontor.**

Heidi har fokus på detaljer på selve grafen. At ”strekene” er like lange betyr at Hanne går like langt begge veier og at de er rette tolkes som jevn fart. Hun forholder seg ikke til enhetene på aksene og bruker hastighet til å forklare hvorfor hun har valgt denne grafen.

| | |
|---|---|
| Svar: | B |
| Hvorfor passer denne best? | Fordi hun går (med jevn hastighet) tar en pause, og går igjen med jevn hastighet |

**Elevsvar 5: Maris svar til oppgave 2, postkontor.**

Av begrunnelsen ser vi at Mari verken forholder seg til avstand eller tid, også hun forholder seg til hastighet som er brukt i oppgaveteksten.

**Graf C:**

Denne grafen kan tolkes som om Hanne går hjemmefra. Avstanden øker og tiden går. Etter oppholdet på postkontoret fortsetter hun å gå lenger hjemmefra. Hanne kommer aldri hjem.

| | |
|---|---|
| Svar: | C |
| Hvorfor passer denne best? | Tiden har en jevn stigning. Så pause og så jevnt igjen. |

**Elevsvar 6: Lars svar til oppgave 2, postkontor.**

Med forklaringen ”Tiden har en jevn stigning”, kan det virke som Lars forklarer endring langs x-aksen (tiden) med endring langs y-aksen. Eleven klarer verken å forholde seg til x- eller y-aksen og blander disse sammen i sin forklaring.

| | |
|---|---|
| Svar: | C |
| Hvorfor passer denne best? | Ser ut som hastigheten er den samme etter stopp |

**Elevsvar 7: Hans svar til oppgave 2, postkontor.**

Svar: Mener grafen C beskriver turen til Hanne best. Det er fordi hun starter med å gå i 0, også går hun litt saktere før hun kommer til postkontoren. Og når hun går hjem igjen i samme tempo så stiger grafen.

**Elevsvar 8: Astrids svar til oppgave 2, postkontor.**

Astrid og Hans tolker begge y-aksen som hastighet og forholder seg ikke til de virkelige enhetene langs aksene.

Svar: C
fordi hun går og da gå grafen oppover og tiden bortover. Så stopper grafen mens hun står i kø, men tiden beveger seg fortsatt, så går hun igjen og da beveger grafen seg oppover igjen

**Elevsvar 9: Anes svar til oppgave 2, postkontor.**

Ane tolker grafen riktig ut fra variabelen tid, men Hanne går lenger og lenger hjemmefra. Grafen ”stopper” når Hanne stopper og grafen ”beveger” seg oppover når Hanne går. Eleven tolker grafen ut fra detaljene i selve situasjonen: ”Grafen går oppover og tiden bortover”.

En del elever har den oppfatningen at ”En funksjon må være monotont økende eller synkende” på grunn av definisjonen av en funksjon: ”For enhver x-verdi fins det en og kun en y-verdi”, (men enhver y-verdi kan ha flere x-verdier). Videre kan elevene være vant til at eksemplene i lærebøkene svært ofte bruker fart og tid som enheter på aksene.

**Graf D:**

Dette er riktig svar på oppgaven. Hanne går hjemmefra og avstanden til hjemmet øker mens tiden går. Hun står stille i kø; avstanden fra hjemmet er konstant og tiden går. Deretter går hun hjem og avstanden til hjemmet minker mens tiden fortsetter å gå. En del av elevene forklarer valg av graf slik:

”Farten øker jevnt, hun står stille i kø, farten går ned.” ”Den viser at hun gikk i jevn hastighet, da stiger kurven og når hun ventet gikk kurven rett frem.”

Den neste eleven viser god forståelse og bruker enhetene på aksene til å tolke grafen:

Svar: D Avstanden til hjemmet vil øke til
hun es framme på postkontore her
vil grafen flates ut siden tiden fortsatt
går men hun befinner seg på postkontoret
når hun er ferdig med å stå i ~~kø~~
går hun med gjevn fart framover og avstanden
til hjemmet synker gradvis

**Elevsvar 10: Pers svar til oppgave 2, postkontor.**

Men også her er det et lite snev av detaljorientering: ”..går i jevn fart fremover..”.

Svar: Graf D) fordi man ser ved et punktet at linja rettes
ut, og da vet jeg at det er her hun stopper. Og etterhvert
går grafen ned igjen som viser at hun går hjem igjen.
Grafen ~~[illegible]~~ er her like lang, pga. hun går med sammme
hastighet.

**Elevsvar 11: Jens svar til oppgave 2, postkontor.**

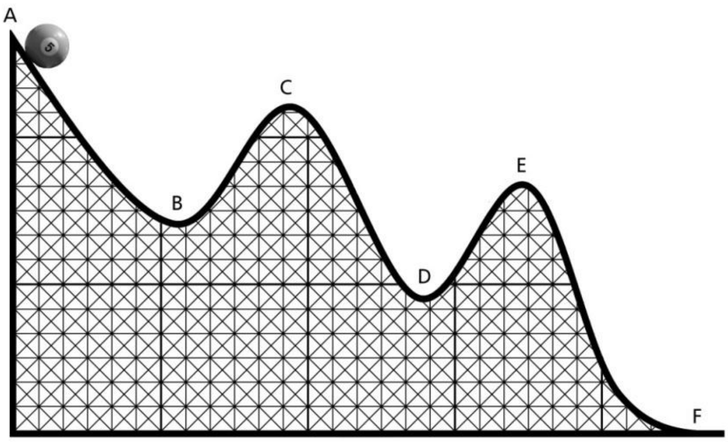
Eleven har riktig forståelse av hvilken graf som best beskriver turen til postkontoret, men i sin forklaring bruker han detaljer på selve grafen. Han forklarer ikke ut fra enhetene på aksene.

Siden det står i oppgaveteksten at Hanne går med jevn hastighet, forholder en del elever seg kun til dette og ser ikke på enhetene langs aksene. De beskriver turen og forklarer valg av grafen kun i forhold til hastighet. De tolker y-aksen som om den skulle vise hastighet. Og de forholder seg kun til denne ene variabelen. På en måte blir det riktig å snakke om fart når enhetene på aksene er avstand og tid, men kun når de bruker det på graf c og d. Problemet med graf c er jo at hun aldri kommer hjem igjen og på a og b reverserer tiden, så der skaper det ingen mening.

Når eleven skal transformere en verbalt beskrevet sammenheng mellom to variable til en graf, fører det ofte til at grafen passer billedlig til hendelsen. Denne misoppfatningen ser vi tydelig at en del av elevene her har.

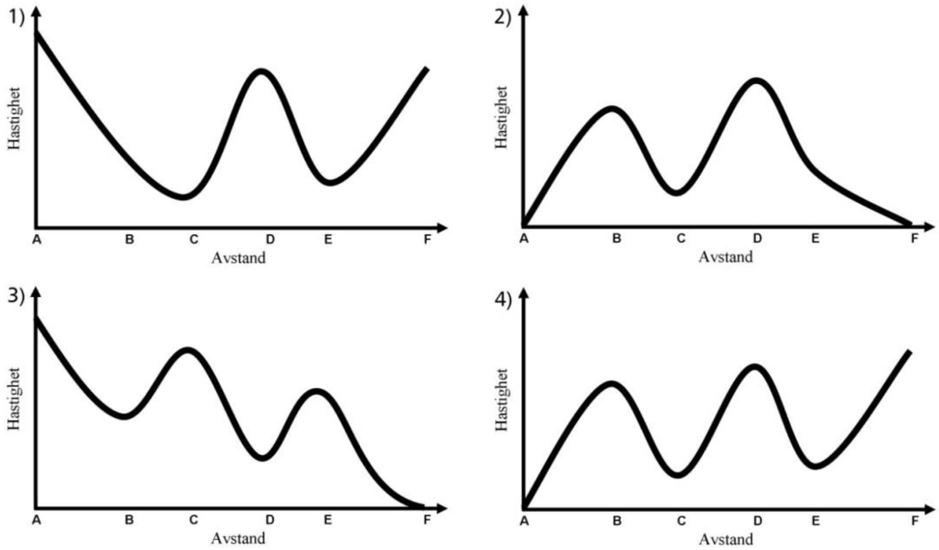
Det viser seg at mange elever har operasjonell forståelse og ikke strukturell, noe som kreves for å kunne tolke en graf.

#### 4.3.1.3 Oppgave 3. Kulebane.



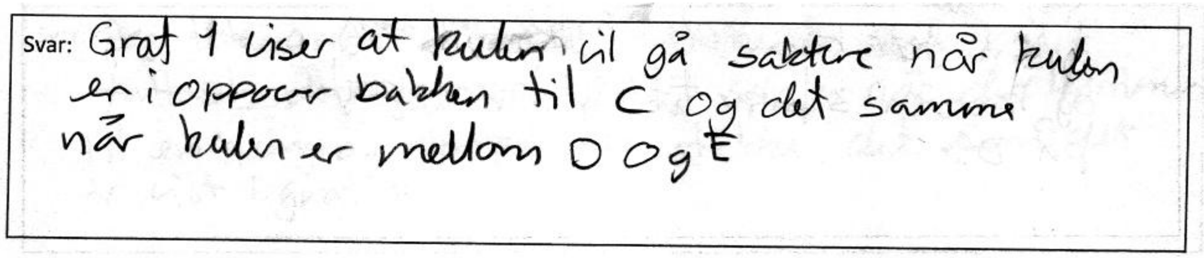

En kule triller fritt langs banen som er vist over.

Under er det skissert fire ulike grafer. Hvilken av disse mener du best viser hvordan hastigheten til kula varierer fra den slippes på toppen av bana (A) til den når endepunktet (F).



**Graf 1:**

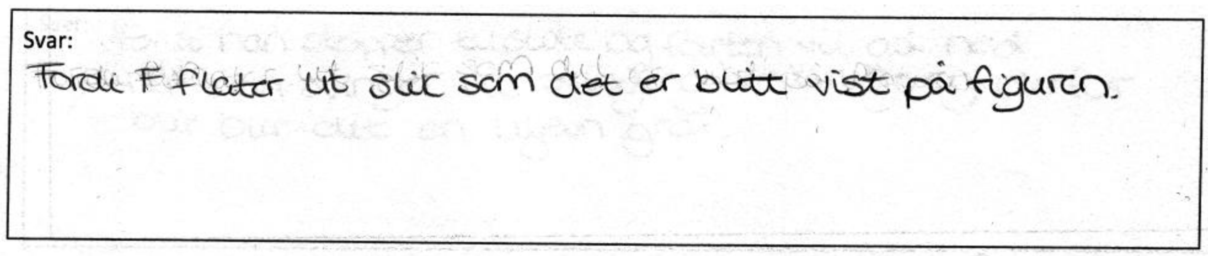
Denne grafen følger kulebanen fra punkt A (*grafen som et bilde av situasjonen*). Det vil si at kula starter med høy hastighet i A for deretter å avta helt til kula når punktet C. Herfra passer grafen bra.


Svar: Graf 1 viser at kulen vil gå saktere når kulen er i oppover bakken til C og det samme når kulen er mellom D og E

**Elevsvar 1: Astrids svar til oppgave 3, kulebane.**

Astrid forklarer valg av graf ut fra fasongen til kulebanen og er bundet opp til detaljer i selve situasjonen. Hun klarer ikke å overføre betydningen til grafen. Hun har en lokal forvirring (Janvier, 1978). Detaljer i situasjonen passer med fasongen til grafen. Kula vil gå sakte i oppoverbakken til C og i oppoverbakken mellom D og E. Oppover på kulebanen blir oppover på grafen. Eleven kan vel sies å ha misoppfatningen grafen som et bilde av situasjonen. Hun forholder seg ikke til enhetene på aksene, ser kun på fasongen til grafen. Hun er opptatt av hvordan ting forandres og overser hva som forandrer seg (*hinder nr 3*, Sierpinska, 1992).

**Graf 2**


Svar:
Fordi F flater ut slik som det er blitt vist på figuren.

**Elevsvar 2: Astrids svar til oppgave 3, kulebane.**

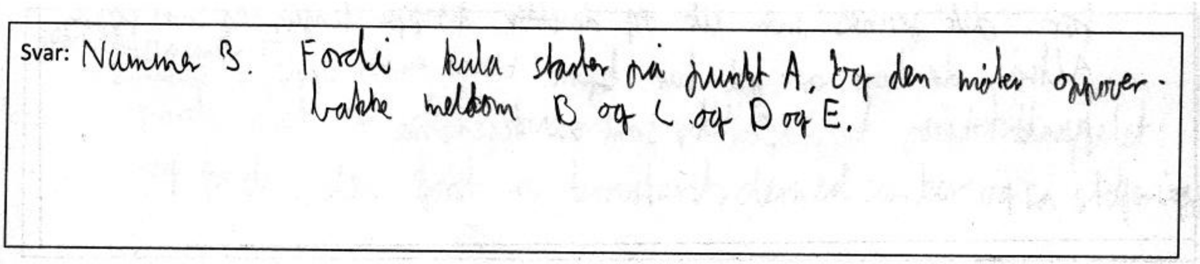
Denne grafen viser en hastighet på kula som stemmer bra frem til punkt E. Etter dette punktet følger grafen fasongen til kulebanen. Ut fra grafen vil da kula trille saktere for til slutt å stoppe helt i punktet F. Eleven sin begrunnelse for valg av graf tyder på at eleven har misoppfatningen *grafen som et bilde av situasjonen*. Eleven veksler mellom å se på grafen som noe symbolsk og abstrakt og som et bilde av situasjonen (Janvier, 1978).

**Graf 3:**


Svar: kula starter fra toppen og stopper på bunnen, jeg synes at det ville vært til rart om den hadde gått oppover på slutten.

**Elevsvar 3: Astrids svar til oppgave 3, kulebane.**

”Kula starter fra toppen og stopper på bunnen”. Denne begrunnelsen er et godt eksempel på en elev som ser på grafen som et bilde av selve situasjonen. Oppoverbakke på kulebanen blir oppover på grafen. Grafen følger fasongen til kulebanen. Eleven forholder seg ikke til hastigheten til kula.


Svar: Nummer 3. Fordi kula starter på punkt A, og den møter oppover-bakke mellom B og C og D og E.

**Elevsvar 4: Erik svar til oppgave 3, kulebane.**

Dette er nok et eksempel på en elev som ser på grafen som et bilde av situasjonen. Grafen vokser der kulebanen går oppover. Oppoverbakke på kulebanen blir oppover på grafen.

**Samtale med Erik:**

L: ”Hvorfor mener du graf 3 passer best?”

E: ”Kula starter her oppe og triller nedover så oppover igjen her og følger banen.” Eleven følger kulebanen med fingeren.

L: ”Tror du farten til kula er størst i B eller C?”

E: ”Det må den være i B.” Eleven ser på selve kulebanen og er rask til å svare. Han ser ikke at dette passer dårlig med grafen.

L: ”Hvis du ser på grafen, er farten størst i B eller C.”

Eleven svarer ikke.

L: ”Hva er enheten på y-aksen?”

Eleven bruker lang tid på å svare, han sitter nok og tenker og prøver å se hva jeg er ute etter.

L: ” Hvor på grafen er farten størst?”

E: ”Det må være her….” Eleven drar litt på det og peker på y-aksen tilsvarende punkt A.

L: ”Hvis du ser på kulebanen, hva er farten i punkt A?”

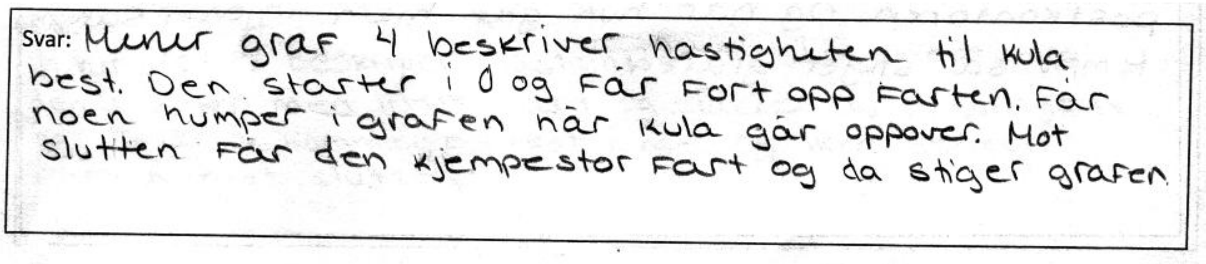
E. ”Ja, kula har vel ikke noe fart fra starten av banen.”

L: ”Hvor øker farten til kula og hvor minker den?”

Etter flere konfronterende spørsmål og en lengre samtale, så kommer eleven frem til riktig graf.

**Graf 4:**

Dette er den grafen som best viser hvordan hastigheten til kula varierer. Ønsker også her å se litt nærmere på elevenes begrunnelser.


Svar: Mener graf 4 beskriver hastigheten til kula best. Den starter i 0 og får fort opp farten. Får noen humper i grafen når kula går oppover. Mot slutten får den kjempestor fart og da stiger grafen

**Elevsvar 5: Sondres svar til oppgave 3, kulebane.**

Selv om Sondre har valgt riktig graf, så er han detaljorientert og knytter deler av forklaringen opp mot fasongen til selve kulebanen.

Ut fra elevenes begrunnelser, ser vi at elevene bruker ulike strategier for å bestemme hvilken graf som passer. Noen ser kun på figuren av selve kulebanen (fokus på selve situasjonen), noen bestemmer graf ut fra hastigheten til kula, mens andre igjen forholder seg kun til avstanden. Mange elever forholder seg til kun den ene variabelen. Elevene må ha et abstrakt begrep om fart for å klare å finne riktig graf.

### 4.3.2 Oppsummering kvalitativ undersøkelse

Av de elevsvarene vi her har sett nærmere på, kan vi konkludere med at svært mange av elevene har stor fokus på detaljene i situasjonen; grafiske detaljer må samsvare med situasjonen. I følge Janvier har elevene en *lokal forvirring* (Janvier,1978). Når de skal tolke en graf, refererer de til detaljer i situasjonen: ”humper” på kulebanen gir ”humper” på grafen, rette strekninger i situasjonen gir rette partier på grafen. ”Grafen går opp og ned slik løypa svinger” og ”når han svinger vil svingen variere og derfor blir det en ujevn graf”. For disse elevene kan ikke en rett linje på grafen tilsvare en kurve på figuren. De har fokus på hvordan ting forandres og overser hva som forandrer seg. De er mer opptatt av forflytningen enn av selve endringen; hvilken sammenheng grafen beskriver (Sierpinska, 1992). For at elevene skal bli gode til å tolke og forstå betydningen av grafer, må de klare å løsrive seg fra selve situasjonen som grafen avspeiler. Elevene må klare å forholde seg til situasjonen som noe abstrakt og ikke være bundet opp til detaljene i den. Eleven må tilegne seg strukturell forståelse.

Under samtalene med elevene forsøkte jeg å stille spørsmål som skulle hjelpe elevene å fokusere på grafen og ikke detaljene i situasjonen. Blant spørsmålene jeg stilte var: På hvilke deler av banen har kula/bilen størst/minst fart? Hvor øker farten til kula/bilen og hvor minker den? Ser du noen sammenhenger mellom formen på banen og formen på den tilsvarende grafen? Hvilke sammenhenger er det? Se kun på grafen, hvor har kula/bilen stor fart og hvor triller/kjører den sakte? Sammenlign så med figuren.

Tolkning krever riktig bruk av enhetene langs aksene og at elevene klarer å koordinere de variable enhetene og se disse i sammenheng over et intervall. At de ser hvor grafen synker, vokser, har størst eller minst stigning og ser betydningen av dette i forhold til selve situasjonen den beskriver. Hvis eleven har for stor fokus på selve situasjonen/bildet klarer han ikke å overføre betydningen til grafen. Da vil han forsøke å overføre selve situasjonen til grafen (oppgave 6) eller bildet av situasjonen til grafen (oppgave 5 og 9) og vi har misoppfatningen *grafen som et bilde av situasjonen*. Noe som viser seg å være en typisk misoppfatning (Janvier, 1978).

I løpet av samtalene opplevde jeg at de fleste elevene raskt oppdaget at deres antagelser ikke holdt og at de fleste forholdsvis raskt kom frem til riktig graf. Gjennom samtalen møtte elevene noe motsetningsfylt. Misoppfatningene ble brakt frem og diskusjon og refleksjon rundt motsetningene i konflikten var med og oppklarte misoppfatningen. Elevene fikk mulighet til å revurdere sine svar. En konfliktdiskusjon kan hjelpe elevene med å rydde misoppfatninger av veien. Dette bygger opp under teorier om at samtaler og diskusjoner i klassen er viktig for å utvikle elevers forståelse og kunnskap. Elevene får gjennom samtalen mulighet til å korrigere sin kunnskap. Det er denne interaksjonen mellom språk og kognisjon Vygotsky la så stor vekt på.

# 5. Diskusjon

I denne delen vil jeg oppsummere de funnene som ble gjort under analysen. Videre vil jeg diskutere mulige årsaker til at elevene kan ha utviklet misoppfatninger. Jeg vil knytte diskusjonen opp mot hvilke hensyn vi kan ta og hvilke muligheter undervisningssituasjonen kan gi. Dette med utgangspunkt i tidligere forskning og teori. Her vil jeg bruke kognitiv teori som sier oss noe om hvordan kunnskapen lagres og bearbeides hos den enkelte elev. Videre diskuteres hvordan elevenes metakognitive evner kan utvikles. Gjennom bruk av ulike læringsstrategier, ved å bruke problemløsing som metode, ved å vektlegge felles diskusjon og refleksjon i klassen og ved å ta i bruk PC og kalkulator.

## 5.1 Hvilke misoppfatninger har elevene?

Vi kan dele oppgavene i undersøkelsen i to grupper: Oppgaver som tester operasjonell forståelse (oppgave 1, 2, 3, 7, 10 og 11) og oppgaver som tester strukturell forståelse (oppgave 5, 6, 8 og 9).

I oppgavene 1 og 2 skal elevene henholdsvis tegne grafer ut fra algebraiske uttrykk og bestemme algebraisk uttrykk ut fra en graf. Undersøkelsen viser at det er en betydelig andel av elevene som ikke mestrer dette. Misoppfatninger som ble oppdaget var: 1) en graf må gå gjennom origo, 2) grafen må starte på y-aksen, 3) tegner grafen som et punkt og 4) ser på funksjonsuttrykket som en likning. Noen blander konstantledd og stigningstall og noen tror at konstantleddet gir skjæring med x-aksen. Noe av årsaken kan være at uttrykkene som ble brukt i oppgave 2 i undersøkelsen er på en litt uvant form og at elevene dermed ikke kan benytte en kjent algoritme. Det kan tyde på at elevene har lært seg en algoritme for å løse en bestemt type oppgave, og at de derfor ikke har en grundig forståelse. Mekanisk læring som pugging av algoritmer kan føre til at fagstoffet lagres i minnet som isolerte enheter og eleven får tunge forestillinger (Ostad, 2004).

Oppgave 3 viser at forholdsvis mange elever ikke har forståelse for at funksjonen viser sammenhengen mellom f(x) og x. Mange av elevene svarer alternativ 4, y=x+3, fordi x-verdiene i verditabellen øker med et fast intervall på 3. Det er viktig at det i undervisningen legges vekt på å forklare forholdet mellom f(x) og x, slik at elevene ser forskjell på den avhengige og den uavhengige variabelen.

Resultater fra oppgave 7 viser at en del elever forveksler stigningstall og konstantledd. I oppgave 10 er det flere elever som sammenlikner to variable ved å se på en av dem. Mens resultater fra oppgave 11 viser at forholdsvis mange elever har den misoppfatningen at en graf må starte i origo.

Oppgavene 5, 6 og 9 tester elevenes strukturelle kunnskap ved at elevene skal bestemme grafen til en gitt situasjon. Elevene må kunne se på en graf som et objekt for å kunne tolke dens egenskaper. Misoppfatninger som kom frem gjennom undersøkelsen var: 1) ser på grafen som et bilde av situasjonen (ikonisk), 2) tolker grafen geometrisk, som et kart og 3) tolker grafen kun ut fra den ene variabelen. Elever som har disse misoppfatningene er bundet til situasjonen grafen fremstiller. I følge Janvier (1978) har elevene en *lokal forvirring*. De klarer ikke å løsrive seg fra detaljer i selve situasjonen og klarer dermed heller ikke å se på grafen som noe abstrakt. Grafen må passe billedlig med figuren til situasjon. Rette linjer i figuren må gi rette linjer på grafen (*hinder nr 3*, Sierpinska, 1992). Videre har mange elever problemer med å forholde seg til to variable samtidig. De tolker grafen ut fra kun den ene variabelen og mangler forståelse for at grafen viser relasjonen mellom to variable.

I oppgave 8 skal elevene bestemme hvilken av to grafer som har størst stigningstall i et punkt. Dette tester også elevenes strukturelle forståelse. Denne oppgaven avdekket at forholdsvis mange elever forveksler høyest på grafen med størst stigning. Dette kan tyde på at elevene ikke klarer å forholde seg til utviklingen over et intervall, men har fokus på punkter. Janvier (1978) forklarer denne misoppfatningen med måten undervisningen tilnærmer seg funksjonsbegrepet på. Elevene lærer å tegne grafer ved å plotte punkter fra en verditabell. Denne metoden former elevenes syn på grafer. Elevene tolker grafer ved å fokusere på punkter i stedet for å se utviklingen over et intervall.

### 5.2 Årsaker til at eleven har misoppfatninger

Det er ikke nok for en lærer å vite hvilke misoppfatninger eleven har. Det som kanskje er mer interessant for en lærer er å vite noe om, er hvorfor disse misoppfatningene oppstår. Først da vil læreren ha mulighet til å ta hensyn til dette i undervisningssituasjonen. Læreren kan lære av hvordan elevene lærer og har dermed mulighet til å endre sin praksis.

Misoppfatninger oppstår i samspillet mellom elevens læringsforutsetninger og matematikkens innhold og undervisningsform. Undervisningen kan ikke foregå uten at eleven bygger ny kunnskap på eksisterende kunnskap. Ensidig fokus på én eller noen få forklaringsmåter kan være lite hensiktsmessig. De fleste oppgaver kan løses på mange måter. Dette er viktig å formidle til elevene. Ved å benytte ulike innfallsvinkler til et tema, vil det være større sannsynlighet for at alle elevene skal klare å knytte ny kunnskap opp mot noe de allerede vet. Videre vil elevene opparbeide et større repertoar av strategier; få kunnskap om og kjennskap til flere ulike måter å løse en og samme oppgave på.

Det blir i matematikktimene ofte lagt vekt på å lære bort regler, lover, prinsipper og håpet er at elevenes forståelse skal utvikles etter en rekke eksempler og øvelser (Janvier, 1978). Elevene utvikler liten grad av metakognitiv kunnskap, fordi undervisningen i hovedsak legger vekt på formidling av regler og prosedyrer og ikke forståelse. Dette er den viktigste årsaken til elevenes matematikkvansker i følge Alan Schoenfeld (1984, s. 361). Elevene tilegner seg gode ferdigheter i å utføre algoritmer, men uten å kunne utnytte algoritmen i en annen kontekst, fordi de ikke har noen grundig forståelse av det matematiske innholdet. Dette kan være årsaken til at såpass mange elever ikke klarer å tegne grafene i oppgave 2, fordi de ikke kjenner igjen formen på uttrykkene.

Skolematematikken er ofte preget av regel-først-og-øvelse-etter. Elevene blir servert metoder som skal pugges og disse brukes til å løse problemer og gir svaret raskt. Elevene utforsker ikke selv problemene. De blir vant til at svaret skal finnes raskt ved hjelp av ferdige regler og metoder. Dette kan medføre at elevene etter hvert ikke gidder å pønske ut en løsningsmetode selv. Elevene blir passive. I tillegg er oppgavene ofte kunstige og det praktiske er nedvurdert. Elevene får lett den oppfattelsen at skolematematikken ikke har noe med virkeligheten å gjøre. Dette kan føre til at enkelte elever gir opp å prøve å få en mening ut av matematikken.

Hva slags kunnskap er det elevene trenger og hva bør vi legge vekt på i undervisningen? Pugge algoritmer eller opparbeide begrepsforståelse? Erfaring fra egen undervisning er at svært mange elever, hvis de blir spurt, ikke ønsker å se utledning av nye formler, lover og regler som tas i bruk. Elevene tar i bruk nye algoritmer og har tilsynelatende ingen interesse av å finne ut av om de nye reglene/formlene kan ses i sammenheng med noe de kjenner til fra før. Resultatet blir at elevene tilegner seg gode ferdigheter i å utføre algoritmer, uten egentlig å ha en grundig forståelse av det matematiske innholdet og uten å kunne anvende algoritmen i en annen kontekst. Å gjennomgå bevisene til nye formler, medfører ofte at mange elever faller av lasset, blir passive og gir opp fordi det blir for avansert. Det ender med at man som lærer forenkler for å gjøre det enklest mulig for elevene. Dette medfører igjen at elevene får dårligere begrepsforståelse og relasjonene mellom de mentale strukturene blir svake. Ny kunnskap knyttes ikke sammen med tidligere kunnskap og eleven utvikler uferdige begreper.

Forståelse fører til at elevene ikke trenger å pugge regler og algoritmer. En elev med god forståelse vil ha lettere for å huske betydningen av begreper over lang tid og har evne til å av resonere seg frem til reglene og algoritmene.

Læreren er ofte svært bundet av læreboken og lærebøkene viser seg i stor grad å være bygd opp rundt regel-først-og-øvelse-etter metoden. Elevene ønsker å komme fortest mulig i gang med oppgavene og oppgavene skal helst være raske å løse og med lite tekst. Kommer de ikke frem til en løsning innen kort tid, ber de lærer om hjelp. For mange elever består problemløsing i matematikk av å løses flest mulig oppgaver på kortest mulig tid. De bruker lite tid på å resonnere og se tilbake på hva de har funnet ut (Polya, 2004). De utvikler dermed i liten grad metakognitiv kunnskap (Shoenfeld, 1992).

Det har vært foretatt mye forskning om undervisning og læring av matematikk, og resultatene viser at elevene utvikler en bedre forståelse av matematiske begreper ved å arbeide grundig med et fåtall velvalgte aktiviteter enn å løse en stor mengde like oppgaver (Schoenfeld, 1992).

Vi vet ikke nøyaktig hvordan elevene lærer. Derfor er det viktig at elevene læres opp til aktiv overvåking og regulering av egen læringsprosess; ”Hvordan lærer jeg best?” Eleven må selv ta ansvar og læreren må legge til rette for dette.

### 5.2.1 Begrepsoppbygging

Elevene kan ha ferdigheter i faget uten å ha forståelse. Dette kan skape misoppfatninger. Kunnskap må organiseres i vårt mentale system for at vi skal være i stand til å gjenkalle kunnskapen i passende situasjoner (Ostad, 2004). Det kan være at elevene klarer å tegne grafen til et uttrykk på formen y=ax+b, men når eleven ikke har forståelse, klarer ikke eleven å gjenkalle kunnskapen og overføre til uttrykkene gitt i oppgave 2.

Mengdetrening som drill og gjentatte oppgaver av det samme medfører sjelden forståelse av et begrep. Men det er viktig å automatisere en del av kunnskapen, slik at ressurser i arbeidsminnet frigjøres. Elever som ikke har automatisert selv de enkleste regneoperasjoner, vil bruke en forholdsmessig stor del av kapasiteten i arbeidsminnet til å utføre disse. Dette fører til at en tilsvarende liten del av arbeidsminneressursene vil kunne brukes til bearbeiding og koding av ny informasjon.

Det å løse matematikkoppgaver utfordrer evnen til å planlegge, sekvensere og gjennomføre handlinger. Ofte trenger man å holde flere ulike alternative handlinger i arbeidsminnet samtidig. Dersom eleven ikke har automatisert de grunnleggende ferdighetene, vil arbeidsminnet fort gå fullt. Hvis kunnskapen i tillegg er lagret som isolerte enheter i minnet, vil irrelevant og unødvendig informasjon ta plass i arbeidsminnet og redusere elevens evne til å løse problemet. Hos disse elevene vil kunnskapslageret være preget av rigiditet og vanskelig tilgjengelighet og dermed være lite funksjonelt (Ostad, 2004). Informasjonsenhetene er løst knyttet sammen; skjemaene har svake relasjoner. Eleven vil ikke se fellestrekk ved oppgaver og dermed løse enhver oppgave som om det var et nytt problem, noe som krever mye oppmerksomhet. Når han ikke finner noen mening i en oppgave, vil han benytte backup-strategier.

Elever som skal tolke den deriverte til en funksjon og som ikke har automatisert algoritmene for derivasjon, vil fylle arbeidsminnet med detaljer tilknyttet selve algoritmen og kan lett miste fokus på hva de skal bruke den deriverte til. Tilsvarende gjelder for elever som skal tegne en graf. Hvis de ikke har automatisert beregning av funksjonsverdier og tallpar, blir fokus på detaljer i selve algoritmen og ikke hva selve grafen symboliserer.

Elevenes mentale representasjon av matematiske objekter eller størrelser kan være et hinder mot å forflytte seg fra en representasjonsform til en annen (Sierpinska, 1994). Elever som ser på grafen som et sett med punkter, får problemer med å forholde seg til et intervall og blant annet se forskjell på høyest på grafen og størst stigning som i oppgave 8 i undersøkelsen. I oppgave 5 og 9 var enhetene på aksene hastighet og avstand, noe som viste seg å være vanskelig for en del elever å forholde seg til. Dette kan komme av at elevene kun har erfaring med grafer hvor enhetene er avstand og tid.

Elever som ikke klarer å se på en graf som et objekt, vil få problemer med å tolke en graf eller tegne grafen til en gitt situasjon. For å mestre dette må eleven kunne se både den konkrete og abstrakte informasjonen i en graf (Sierpinska, 1994). Dette igjen krever at funksjonsbegrepet er internalisert (Vygotsky, 2001). Det er ingen kjent algoritme som kan gi riktig løsning på en slik oppgave.

I oppgave 8 var det en del elever som hadde misoppfatningen *høyest på grafen betyr størst stigning*. Dersom elevene skal kunne bestemme hvilken av to grafer som har størst økning i et intervall, må de ha begrepsforståelse om stigningstall. Elevene må kunne forholde seg til stigningstall som et abstrakt begrep. Det er vanskelig for elevene å tilegne seg et abstrakt begrep ut fra en definisjon. Det må mange og varierte eksempler til. Og de begrepsbildene som dannes begrenses i stor grad av de eksemplene som gis. Dette kan forårsake misoppfatninger og virke som et hinder for videre læring

I oppgave 6 var enhetene avstand og tid brukt på grafen, men variabelen hastighet ble brukt i den verbale beskrivelsen. Litt over halvparten av elevene svarte riktig på denne oppgaven. Årsaken til at såpass mange elever ikke klarte å finne riktig graf til situasjonen, kan være at begrepet hastighet, som ble brukt i teksten, ikke er vist på grafen. Det viser seg å være problematisk for en del elever å tilegne seg forståelse for begreper som ikke eksplisitt er gitt av grafen (Leinhardt, 1990).

I oppgave 2 i undersøkelsen ble elevene bedt om å tegne graf ut fra algebraisk uttrykk. Dette viste seg å være svært vanskelig for mange. Elevene har lært seg en algoritme for å tegne lineære likninger, men når formen på oppgaven er forskjellig fra hva de er vant til, klarer de ikke å løse oppgaven. Det kan tyde på at elevene er på pre-prosedyre eller prosedyre nivået (DeMarios/Grey & Tall, 2004). På dette nivået er elevene avhengig av detaljer i selve algoritmen. Det er ikke knyttet interne konstruksjoner til prosedyren fordi den ikke er internalisert (Vygotsky, 2001). Prosedyrer som ikke er knyttet til begreper vil lett kunne glemmes og lar seg vanskelig rekonstrueres. Dermed vil ikke elevene klarer å generalisere og overføre betydningen når oppgavene har en ukjent form.

Kunnskapen er kontekstavhengig og det kan være vanskelig for elevene å overføre kunnskapen til nye situasjoner. Det er derfor svært viktig at elevene får møte de matematiske begrepene i en lang rekke ulike situasjoner. En begrepsoppfatning som er dannet fra erfaringer gjort på et avgrenset felt vil ofte lede til feil når begrepet brukes på andre felt. Oppgave 2 viste at noen elever har den misoppfatningen av grafen må starte på y-aksen. Årsaken kan være at de eksempler som er gitt kun er tegnet i første kvadrant. Andre elever tegnet grafen som et punkt. Dette kan ha med måten undervisningen tilnærmer seg funksjonsbegrepet (plotte punkter fra en verditabell). Elevene ser på grafen som en samling med punkter.

Ut fra Piagets teori kan vi prøve å forklare de misoppfatninger som oppstår gjennom hvordan matematikken er organisert i skolen, blant annet gjennom undervisningen og lærebøkene. Årsaker til misoppfatninger, kan ifølge Piaget (1970), være at elevene ikke har utviklet fullstendige tanker knyttet til funksjons-begrepet på grunn av at de i utilstrekkelig grad har vært aktive i læringsprosessen. Elevene kan ha fått begrenset mulighet til å samhandle med andre elever på grunn av undervisningsmetoden som blir benyttet. Det er viktig at elevene er aktive deltagere i læringsprosessen og ikke passive mottakere. Det kan være at det i for liten grad har blitt tilrettelagt læringsaktiviteter der elevene har kunnet eksperimentere, utforske og oppdage løsninger, noe som er nødvendig for at elevene skal kunne utvide sine kognitive strukturer (Piaget, 1970).

### 5.2.2 Undervisningssituasjonen

I sin hovedoppgave påstår Kobberstad at misoppfatninger i matematikk i stor grad konstrueres gjennom undervisningen elevene får på skolen (Kobberstad, 1991). Lærerne kan være grunnen til at misoppfatningene hos elevene oppstår, fordi lærerne selv har misoppfatninger. Enhver matematiker har antakeligvis områder innen matematikken han ikke føler seg komfortabel med.

Undervisningsmetoden er ofte tavleundervisning med enveiskommunikasjon fra lærer til elev, noe som medfører at elevene blir passive. Den viktige diskusjonen uteblir, noe som blant annet Vygotsky (2001) la stor vekt på. Han mente at interaksjonen mellom språk og kognisjon er vesentlig for oppbyggingen av mentale prosesser og strukturer. I mange matematikk-kurs er det stort pensum, derfor kan tidsaspektet være årsaken til at læreren velger denne formen på undervisningen. Fokus er ofte på eksamen og læreren driller elevene for å komme best mulig igjennom denne.

For å introdusere nytt stoff til elevene bruker læreren språket, noe som igjen kan være et hinder for at elevene skal forstå. Det matematiske symbolspråket er for mange elever vanskelig. Det er mange nye begreper som kan føre til at elevene ikke får noen mening ut av det som blir sagt.

En annen årsak til misoppfatninger, kan være lærebøkenes ensidige eksempler. I undervisningssituasjonen legges det som regel stor vekt på selve utførelsen men ikke nødvendigvis like stor vekt på forståelsen av teorien som ligger bak. Elevene blir flinke til å utføre algoritmer (operasjonell kunnskap) mens bevisene til de reglene som blir tatt i bruk ofte er vanskelige for elevene og hoppes over av lærer. Årsak til misoppfatninger kan derfor være at læreren forsøker å forenkle for at elevene skal forstå (*didaktiske hinder*). Skolematematikken består for mange elever i å følge lærerens regler og kunnskap i matematikk betyr å huske riktig metode og hva læreren gjorde.

Å se kjente ting på en ny måte (*reification*, Sfard, 1992) kan være svært vanskelig. Inkubasjonstiden kan være lang. Det kan ta lang tid før man forstår. Elevene kan miste tålmodigheten og føle at det er umulig å lære matte. De som ikke er forberedt på å jobbe hardt for å lære matte, vil etter hvert gi opp og tenke ”jeg lærer aldri matte!”.

En av grunnene til at elevene har misoppfatninger, kan også være at de rett og slett har for liten praktisk erfaring med visse type oppgaver.

### 5.3 Hvordan undervise for at elevene skal forstå?

”Elevene kan ha uferdige begreper, gjør av og til feil og viser misoppfatninger. I en tillitsfull og byggende atmosfære skal dette brukes som utgangspunkt for videre læring og dypere innsikt” (L97, s. 154,155).

Elevers misoppfatninger kan brukes konstruktivt. Det at elever gjør feil på grunnlag av misoppfatninger kan danne utgangspunkt for refleksjon og diskusjon. Konstruktiv bruk av misoppfatninger i sosial samhandling i klasserommet kan bidra til elevenes begrepsutvikling. Ved at læreren kjenner til en del typiske misoppfatninger, kan han drive konfliktorientert undervisning. Ved å bringe de gale antagelsene frem i lyset, får eleven mulighet til å revurdere sine kunnskaper (diagnostisk undervisning). Misoppfatninger forsvinner ikke bare ved å repetere de korrekte prinsippene. Eleven må bli oppmerksom på egne forestillinger og det som er matematisk korrekt.

Fra tidligere forskning som KIM-prosjektet og gjennom min undersøkelse, ser vi at elever sliter med å se sammenhenger mellom ulike representasjonsformer for funksjoner. Spørsmålet er hvordan vi kan håndtere disse problemene i en klasse.

### 5.3.1 Ulike tilnærmingsmetoder til funksjonsbegrepet

I videregående skole er symbolene og definisjonene som læres bort ofte strukturelle (Sfard, 1992). Denne tradisjonelle måten å drive undervisning på er i følge Sfard (1992) ikke spesielt effektiv. Mange lærebøker presenterer funksjoner i ren matematisk form, med matematiske formler og definisjoner, noe som kan virke som et hinder for læring. En formell tilnærming til begrepet funksjoner har store begrensninger (Sierpinska, 1994; Sfard, 1992). Før det formelle presenteres, vil det være bedre med en praktisk tilnærming. Dette for å vekke nysgjerrighet og interesse og oppnå motivasjon, ved at eleven ser at det er nyttig og kan brukes til noe fornuftig.  Det er ikke nødvendigvis selve matematikken (innholdet) men måten det blir presentert på, som skaper problemer. Hvordan oppgaven stilles påvirker i hvilken grad eleven klarer å løse problemet.

Undersøkelsen viser at svært mange elever kun forholder seg til den ene variabelen når de skal tolke en graf (oppgave 5, 6 og 9). De har ikke forståelse for at funksjonsuttrykket viser sammenhengen mellom to variable. Når elevene skal lære å tegne grafer, beregner de enkeltverdier og ser dermed ikke nødvendigvis sammenhengen med en kontinuerlig graf (Janvier, 1978). Elevene har fokus på par av tall. For å unngå dette, bør grafen introduseres og fokus endres fra numeriske beregninger til å tolke grafen som et sett slike punkter som er avhengige av hverandre, som viser sammenhengen mellom de to variable.

”Undervisning i funksjoner i skolen er ineffektiv fordi begrepet introduseres med punkt til punkt avlesing” (Janvier, 1978). Janvier forklarer misoppfatningene (høyest på grafen/ størst stigning) med denne måten undervisningen tilnærmer seg funksjonsbegrepet på. Elevene lærer å tegne grafer ved å plotte punkter fra en verditabell. Denne metoden former elevenes syn på grafer. Elevene tolker grafer ved å fokusere på punkter i stedet for å se utviklingen over et intervall. For å hjelpe elevene kan læreren stille spørsmål som tvinger elevene til å se på helheten.

I følge Anna Sfard (1992) er begynneropplæringen i funksjoner som regel på den operasjonelle måten, mens den strukturelle innføres etter hvert og da er de to måtene som regel i bruk om hverandre og slik bør det være i følge henne. Man bør ikke introdusere funksjoner som sett av ordnede par. Det er vesentlig å vinkle undervisningen slik at fokus blir på relasjonen mellom den uavhengige og den avhengige variabelen (Sfard, 1992).

I følge Anna Sierpinska (1994) bør vi starte innlæring av funksjoner med å se på funksjoner som modeller av relasjoner og helst bruke praktiske eksempler tatt fra virkeligheten. Den generelle definisjonen av funksjoner bør ikke introduseres for tidlig, men det er svært viktig at elevene ser forskjell på den avhengige og den uavhengige variabelen. Det bør legges stor vekt på teknikker for å beregne tallpar og samtidig forklare om forholdet mellom f(x) og x. Slik at elevene får forståelse for at grafen viser sammenhengen mellom f(x) og x.

The Shell Centre (Swan, 1985) foreslår følgende måter å tilnærme seg stoffet på:

- Skissere en graf som beskriver en kjent fysisk situasjon. Se sammenheng mellom endring i situasjon og endring i graf.
- Analysere en graf og beskrive ulike hendelser som passer til grafen (folketall, temperaturen i en kaffekopp osv).
- La elevene finne egne eksempler på situasjoner som kan beskrives med en graf.

Gjennom denne tilnærmingen til begrepet vil elevene enklere se relasjonen mellom de to variablene.

For elever som ser på grafen som et bilde av situasjonen, er grafen fullstendig uten mening. Eleven har i for stor grad fokus på selve situasjonen og klarer ikke å løsrive seg fra den. Men ved gjentatte øvelser i å tolke grafer vil elevene kunne forbedre sin evne til å se på situasjoner som abstrakte representasjoner (Janvier, 1978, s. 10.10).

Janvier (1978) mener at det i en undervisningssituasjon er viktig å bruke grafer i en meningsfylt sammenheng og å fokusere på å snakke om grafen og de relasjonene den visualiserer. Fokus må flyttes fra beregning av tallpar til å tolke sammenhenger mellom variable størrelser. Fra en mekanisk til en mer praktisk tilnærming av funksjonsbegrepet. Men det trenger ikke bare være virkelighetsnære situasjoner. Også komplekse grafer bør introduseres og tolkes ut fra grafiske termer uten at det skal være nødvendig å referere til en bestemt situasjon.

### 5.3.2 Konstruktivisk tankegang

I følge konstruktivistisk tankegang er det eleven selv som konstruerer sin kunnskap. All læring er en aktiv prosess, hvor ny kunnskap bygger på tidligere erfaring og kunnskap. Elevene bestemmer selv sin egen læring, og lærerens oppgave blir å legge til rette for, og å støtte eleven i læreprosessen (Botten, 2003).

Lærerens undervisningspraksis har stor betydning for elevenes tilegnelse av kunnskap. Måten læreren underviser på, hvordan han formidler faget og hvilke aktivitetene som dominerer undervisningen, påvirker det synet elevene får på matematikken. Det er viktig at det ikke undervises som om matematikken kun består av et sett med regler, oppskrifter og formler, men at det i stedet fokuseres på sammenhenger og forståelse. Dette kan man oppnå gjennom diskusjoner i klasserommet. Når nytt stoff skal introduseres, kan det være lurt å stille elevene passende spørsmål, som får dem til å søke etter sammenhenger og løsninger.

Ved å diskutere oppgaver i fellesskap i klasserommet, kan vi oppnå at elevene utvikler forståelse. Dette kan benyttes for å utvikle elevenes evner til å tolke grafer og evner til å se på en graf som en relasjon mellom to variable. Elever kan oppnå langt bedre forståelse i et fag når hensiktsmessige spørsmål blir stilt underveis i prosessen. Gjennom dialog mellom lærer og elev, vil **s**pråket kunne bidra til overføring av kunnskap og ferdigheter og være et redskap som bidrar til internalisering av ny kunnskap og nye ferdigheter.

Det å se lærer eller medelev løse problemer, eventuelt tavleundervisning med ulike tilnærmingsmåter, bidrar til innlæring (*stillasbygging*), men ferdighetene må internaliseres for at eleven skal være i stand til å overføre til andre kontekster (Vygotsky, 2001). For å oppnå dette, trengs egen erfaring. En elev må løse mange og varierte oppgaver for å bli god i matematikk.

Janvier foreslår å ta i bruk problemløsing som metode for at elevene selv skal erfare og oppdage sammenhenger. Under problemløsingsarbeid er evnen til å abstrahere og generalisere, kontrollere og stille spørsmål for deretter å tolke det matematiske resultatet i den kontekst der problemet har sitt utspring avgjørende. Det er dette som betegnes som metakognitiv kompetanse (forståelsesovervåking og kontroll). Elevene må klare å ”heve seg opp”, få et overblikk, og ikke være for detaljfokusert. Evnen til å nå abstrakt nivå er avhengig av en elevs mentale strukturer. Det er derfor svært viktig å ta utgangspunkt i en elevs tidligere erfaring og kunnskap (Janvier, 1978, s. 15.5).

Når det viser seg at en elev har en misoppfatning, kan lærer gjennom en dialog med eleven, ved å diskutere ulike feilsvar, utvikle elvens forståelse. Dialogen aktiviserer det indre språk og bidrar til bevisstgjøring (Ostad, 2004, s. 83). Diskusjoner rundt motsetningene skal være med på å rydde misoppfatninger av veien. En undervisningssituasjon hvor læreren kun forklarer er ikke en effektiv metode i dannelse av begreper, det må konflikt-diskusjoner til **(**Brekke, 1995). Dette gir eleven mulighet til selv å innse det utilstrekkelige i egen tenkning. Da oppnås en kognitiv konflikt. Eleven vil se at den gamle måten og tenke på hindret han i å komme videre (Sierpinska, 1998).

Det vil dessuten være viktig at lærer legger til rette for at elevene kan reflektere over de resultatene de får. Refleksjon kan hjelpe elevene å se sammenhenger og ulike løsningsmetoder (Polya, 2004). ”Hvilke ulike metoder kan vi benytte for å komme frem til en løsning?” Gjennom diskusjoner i klassen kan vi oppnå at elevene bli mer bevisst sine strategivalg og sin kunnskap (Throndsen, 2005).

### 5.3.3 Prinsipper bygd på kognitiv teori

For at elevene skal være klare til å motta kunnskap, må læreren fange deres oppmerksomhet og prøve å oppnå motivasjon. Dette kan gjøres ved å skape en forventning til det som skal skje.  En måte å fange interessen til elevene på, kan være å informere om hensikten med læringen. Dersom elevene ikke er motivert for læring, vil heller ingen læring kunne skje. Dersom man klarer å få elevene til å få gode mestringsopplevelser innenfor faget, tror jeg mye er gjort i forhold til motivasjonen.

Læreren må hjelpe elevene å hente frem eksisterende kunnskap. Dette kan gjøres ved å tilnærme seg nytt stoff på ulike måter. Det bør være mange og varierte eksempler og oppgaver. Eksisterende kunnskap kan lette koding til langtidsminnet. Når ny kunnskap presenteres bør eksisterende kunnskap benyttes. Selv om informasjonen som kodes i langtidsminnet er der permanent, kan det iblant være vanskelig å hente den frem. Dette kan ha med måten det har blitt undervist på. Læringsmåten styrer måten å huske noe på. Det er denne måten vi lagrer informasjonen på (Vavik, 1999). Ensidig fokus på læringsmålet vil gjøre kunnskapen mindre tilgjengelig. Flere innfallsvinkler til nytt stoff, kan forhindre misoppfatninger.

Lærestoffet bør presenteres på en slik måte at oppmerksomheten til elevene rettes mot det som er viktig. Det er en begrensning på hvor mye informasjon det er plass til i arbeidsminnet på en gang. Elevene må rekke å bearbeide og lagre før ny informasjon blir gitt.

Gjentagelse er nødvendig for å lære. Hukommelsestrategier (Elstad og Turmo, 2006) kan være nyttig for å huske enkeltoperasjoner og enkle fakta (pugging), mens utdypingsstrategier (Elstad og Turmo, 2006) benyttes for å utvide eksisterende kunnskap. Læreren kan da hjelpe elevene å se sammenhenger.”Minner dette deg om noe du har lært før?” Repetisjon renser arbeidsminnet og flytter over informasjon til langtidsminnet.

Læreren må prøve å få elevene til å delta aktivt ved å kreve respons. Ved å løse oppgaver i fellesskap i klasserommet, kan lærer få elevene til å delta i diskusjoner og komme med forslag til løsningsmetoder. (Internalisering via språket og stillasbygging, Vygotsky, 2001). Ved å gi oppgaver som skal besvares, skapes det handling som er en forutsetning for konstruksjon av kunnskap (Piaget, 1978).

# 6 Konklusjon

Gjennom undersøkelsen jeg har foretatt, viser det seg at det også i den videregående skolen er en del elever som har misoppfatninger rundt funksjonsbegrepet. Årsaken til dette kan være mange. Blant annet 1) undervisningssituasjonen: undervisningsformen, læreren sine holdninger, kunnskap, metoder og hvilke læringsstrategier som benyttes, 2) elevenes læringsforutsetninger: motivasjon, innsats og grunnleggende kunnskaper og 3) matematikkens oppbygging og innhold.

Undersøkelsen viste at en betydelig andel av elevene har problemer med å tegne grafen til et algebraisk uttrykk. Årsak til misoppfatninger kan være at elevene lærer seg prosedyrer og pugger algoritmer for å løse bestemte oppgaver. Når de får en oppgave på en litt annen form enn det eksempler og oppgaver har vært gitt på før, klarer de ikke å overføre kunnskapen og se sammenheng mellom oppgavene. Mange elever ser på matematikken som et pugge-fag. De pugger ulike formler og algoritmer og mangler forståelse. På den måten oppnår de mekanisk kunnskap og ikke begrepsforståelse. Ved å resonere i etterkant av at elevene har jobbet med oppgaveløsing, kan lærer hjelpe elevene å utvikle metakognitiv kunnskap. Gjennom diskusjon og refleksjon rundt ulike løsningsmetoder trenes elevene opp til å gjøre bevisste valg. Videre kan det føre til økt forståelsen for ulike begreper som for eksempel stigningstall og konstant-ledd.

Noen elever har den misoppfatningen at en graf må gå gjennom origo eller at grafen må starte på y-aksen. Årsaken kan være de eksemplene som har vært gitt av lærer. Det er viktig med mange og varierte eksempler. Stor variasjon og ulik vinkling til stoffet, kan muligens forhindre denne type misoppfatninger. Måten kunnskapen lagres på styres av de eksemplene som læreren viser.

Oppgave 5, 6 og 9 testet elevenes strukturelle kunnskap. Disse oppgavene viste at en del elever ser på grafen som et bilde av situasjonen. Elever som har denne misoppfatningen har stor fokus på selve situasjonen og klarer ikke å forholde seg til grafen som noe abstrakt. Det er blant ulike forskere enighet om at det kan være lurt å starte introduksjonen til funksjoner med å vise til kjente situasjoner som ikke nødvendigvis er beskrevet med et algebraisk uttrykk. Ved å tegne grafen til noe som er i bevegelse, kan dette kanskje hjelpe elevene til å se både den konkrete og abstrakte informasjonen i en graf (Sfard, 1992; Sierpinska, 1994).

Det er også en del elever som forholder seg til kun den ene variabelen når de skal tolke en graf. Man bør i undervisningssituasjonen fokuserer på at grafen visualiserer forholdet mellom to variable. Det er viktig at elevene får forståelse for at grafen viser sammenhengen mellom f(x) og x. På den måten kan man hjelpe elevene til å utvikle ferdigheter i å tolke grafer ut fra begge variable. Ved gjentatte øvelser i å tolke grafer, vil elevene kunne forbedre sin evne til å ”se” den abstrakte informasjonen i en graf.

Oppgave 8 avdekket at forholdsvis mange elever forveksler høyest på grafen med størst stigning. Det kan tenkes at disse elevene tolker grafer ved å fokusere på punkter i stedet for å se utviklingen over et intervall. For å prøve å unngå misoppfatninger av denne typen, bør læreren fokusere på relasjonen grafen fremstiller. I tillegg til å tegne grafer ved å plotte punkter fra en verditabell bør det fokuseres på hvordan grafen utvikler seg over et intervall. Først når eleven ser på grafen som en korrespondanse mellom to sett, har han utviklet strukturell forståelse.

Ut fra resultatene av undersøkelsen, kan det se ut som om det er en sammenheng mellom strukturell og operasjonell kunnskap hos elevene. Vi kan se en tendens til at elever som har operasjonell forståelse også har strukturell forståelse. Og at en elev som har lite operasjonell forståelse har lite strukturell forståelse. Dette passer med Anna Sfard (1992) sin teori om objekter og prosesser. Dualiteten mellom det algoritmiske og strukturelle, mellom handling og forståelse er sterk (Sfard, 1992).

Samtidig viste undersøkelsen at en liten andel av elevene har strukturell men ikke operasjonell forståelse. Dette kan ha en sammenheng med at elevene i stor grad benytter kalkulator til å tegne grafer. De utvikler strukturell forståelse uten å gå veien om operasjonell forståelse (Tall, 1991). Eleven kan fokusere på resultatet i stedet for detaljene i prosessen, det tar kalkulator seg av. Dermed kan eleven danne objekter uten å gå veien om å internalisere prosedyrene først.

Kjennskap til typiske misoppfatninger elevene kan ha, gir læreren mulighet til å ta hensyn til dette i undervisningen. Diagnostiske oppgaver kan hjelpe til med å avdekke eventuelle misoppfatninger som elevene har utviklet. Dette kan læreren bruke til å rette undervisningen mot å fremheve misoppfatningene slik at elevene har mulighet til å overvinne de.

En forutsetning for at elevene skal kunne utvikle en god matematisk forståelse, er at nettverket av kunnskap utvides og at det knyttes forbindelse mellom nytt stoff og eksisterende nettverk av kunnskapsenheter. Det vil hjelpe elevene å se sammenhenger mellom ulike representasjonsformer.

Ved å gi elevene mulighet til selv å finne løsninger på problemer, ved å la elevene få være utprøvende og utforskende i sin læringsprosess, vil de kunne konstruere kunnskap ut fra erfaring og ikke gjennom hva de har blitt fortalt av læreren. Hvis man tilrettelegger læringsmiljøet på en slik måte at elevene blir aktivt med i læringsprosessen, slik at de får muligheten til å reflektere over læringsaktivitetene, kan man sannsynligvis hjelpe elevene til å *lære seg* matematikk, og ikke *lære* elevene matematikk.

Det er antageligvis umulig å unngå at misoppfatninger oppstår. De er en del av elevenes normale utvikling. Nye ideer blir tolket ut fra eksisterende erfaringer og kunnskap. Men ved å være bevisst på hvordan nye begreper innføres og hvilke misoppfatninger som kan forekomme, kan man legge grunnlag for en god begrepsbygging.

## Referanseliste

Alseth, B., Breiteig, T., Brekke, G. (2003): *Evaluering av Reform 97*. Telemarksforskning.

Bandura, A. (1998): *Encyclopedia of mental health.* ( Red: Fredman, H.) San Diego: Academic press.

Botten, G. (2003): *Meningsfylt matematikk – nærhet og engasjement i læringen.* Caspar forlag.

Brekke, G. (1995): *Kartlegging av matematikkforståelse – Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk.* Læringssenteret.

Bråten, I. (1996): *Læring i sosialt, kognitivt og sosialt-kognitivt perspektiv*. Cappelen Akademisk Forlag.

Bråten, I. (1996): *Vygotsky i pedagogikken*. Cappelen Akademisk Forlag.

Davis, R. (1990): *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics*, edited by Robert B Davis, Carolyn A Maher, Nel Noddings, Journal for research in mathematics education (JRME), National Council of Teachers of Mathematics.

DeMarois, P. & Tall, D. O. (1996): *Facets and Layers of the Function Concept. Proceedings of PME 20*, Valencia, 2, s. 297–304.

DeMarois, P. & Tall, D. O. (1999): *Function: Organizing principle or cognitive root?* In Zaslavsky (Ed.), Proceedings of the 23rd Conference of PME, Vol.2, s. 257–264. Haifa: Israel.

Downs, J. & Downs, M. (2002): *Advanced Mathematical Thinking with a special reference to Reflection on Mathematical Structure*. I Lyn English (Chief Ed.) Handbook of International Research in Mathematics Education, Lawrence Erlbaum Ass., N. J., s. 165–195.

Elstad, E., Turmo, A. (2006): *Læringsstrategier*. Universitetsforlaget.

Frøystein, T (1998): *Jeg forstår ikke lærer.* URL: http://home.no.net/torfroy/skole/Faga98.htm [Lesedato 01.05.2009]

Gjone, G. (1997): *Veiledning til funksjoner. Kartlegging av matematikkforståelse*. Nasjonalt læremiddelsenter (NLS).

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994): *Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic.* Journal for Research in Mathematics Education, 25(2), s. 116–140.

Guershon, H., Dubinsky, E. (1992): *The concept of function, aspects of epistemology and pedagogy.* Mathematical association of America – MAA.

Hansson, Ø. (2006): *Studying the Views of Preservice Teachers on the Concept of Funtion*. Department of Mathematics Luleå University of Technology.

Harel, G., Dubinsky, E. (1992): *The Concept of Function, Aspects of Epistemology and Pedagogy*. MAA Notes, Vol. 25, Mathematical Assosiation of America.

Heir, O., Erstad, G., Engeseth, J., Borgan, Ø., Pedersen, I. P. (2006): *Matematikk 1P.* Aschehoug.

Heir, O., Erstad, G., Engeseth, J., Borgan, Ø., Pedersen, I. P. (2006): *Matematikk 1T.* Aschehoug.

Holm, M. (2003): *Opplæring i matematikk*. Cappelen Akademisk Forlag.

Høines, M. J. (1998): *Begynneropplæringen. Fagdidaktikk for barnetrinnets matematikkundervisning*. Caspar forlag.

Janvier, C. (1978): *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations – studies and teaching experiments*. University of Nottingham.

Johansen, O. J. (2001): *Misoppfatninger i matematikk blant elever i Namibia og Norge.* Hovedfagsoppgave i realfagsdidaktikk. Oslo: Universitetet i Oslo, ILS.

Kilpatrick, J., Nesher, P. (1990): *Mathematics and cognition: A research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education*. ICMI study series, Cambridge university press.

Kirke-, utdannings- og forskningsdepartement (1996): *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen. L-97*. Oslo: Kirke-, utdannings- og forskningsdepartement.

Kobberstad, T. (1999): *Sims-ala-Bærum.* Hovedfagsoppgave i realfagsdidaktikk. Oslo: Universitetet i Oslo, ILS.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., Stein, M. (1990): *Functions, Graphs and Graphing: Tasks, Learning and Teaching*. Review of Educational Research, 60(1), s. 37–42.

Lie, S. & Caspersen, M. L. (2004): *Innføring i SPSS*. Oslo: Universitetet i Oslo, ILS.

Lutzen, J. (1978): *Funktionsbegrebets udvikling fra Euler til Dirichlet.* NORMAT 25, s. 5–32.

Mosvold, R. (2001): *Det genetiske prinsipp i matematikkdidaktikk.* Hovedfagsoppgave i realfagsdidaktikk. Kristiansand: Høgskolen i Agder.

Niss, M (2003): *Den matematikkdidaktiske forskningens karakter og status*. *I: Matematikk for skolen.* Barbro Grevholm (red.). Fagbokforlaget.

Oldervoll, T., Orskaug O., Vaaje A., Hanisch, F. (2007): *Sinus matematikk S1*. Cappelen forlag.

Oldervoll, T., Orskaug O., Vaaje A., Hanisch, F. (2007): *Sinus matematikk 1T*. Cappelen forlag.

Ostad, S. A. (2004): *Matematikklæring og matematikkvansker*. En artikkelsamling.

Institutt for spesialpedagogikk, UiO.

Ostad, S. A. (2006): *Matematikklæring og matematikkvansker*. Studiehefte - Del 2. Institutt for spesialpedagogikk, UiO.

Piaget, J. (1970): *Genetic epistemology.* New York: Columbia University.

Polya, G. (2004): *How to Solve it.* Princeton University Press.

Rasch-Halvorsen, A. (1997): *Funksjoner i grunnskolen - Elevers møte med funksjonsbegrepet.* Hovedfagsoppgave i realdidaktikk. Oslo: Universitetet i Oslo, ILS.

Robson, C. (2002): *Real World Research*, 2. Utgave. Blackwell Publishers.

Romberg, T. A., Fennema, E., Carpenter, T. P. (1993): *Integrating research on the Graphical Representation of Functions*, LEA.

Schoenfeld, A. (1985): *Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding.* I Silver, E. Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives, s. 361–377, LEA.

Schoenfeld, A. (1992): *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics*. I Grouws, D. (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning, s. 334–370. New York: MacMillan.

Schoenfeld, A. (1994): *Mathematical thinking and problem solving*. LEA..

Sfard, A. (1991): *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin.* Educational Studies in Mathematics, 22(1), s. 1–36.

Sfard, A. (1992): *Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – the case of function*. I Ed Dubinsky, Guershon Harel (Eds), *The Concept of Function, Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, Vol. 25, Mathematical Assosiation of America.

Siegler, R. S. (1990): *How content knowledge, strategies, and individual differences interact to produce strategy choises.* I Schneider, W. & Weinert, F.E. (eds.): Interactions among aptitudes, strategies, and knowledge in cognitive performance, s. 73–89. New York: Springer-Verlag.

Sierpinska, A. (1992): *On understanding the notion of function*. I Ed Dubinsky, Guershon.

Sierpinska, A. (1994): *Understanding in mathematics*. The Falmer Press.

Sierpinska, A. (1998): *Epistemological Remarks on Functions*. Proceedings of the Twelfth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Vesprem, Hungary, s. 568–575.

Silver, E. A. (1985): *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple* *research perspectives.* LEA Lawrence Erlbaum associates, publishers.

Sjøberg, S. (2001): *Fagdebatikk*. Oslo. Gyldendal.

Solvang, R. (1992): *Matematikkdidaktikk*. NKI forlag.

Swan, M. (1985): *The language of functions and graphs.* Shell centre for Mathematical Education. University of Nottingham.

Tall, D. (1991): *Advanced mathematical thinking.* Kluwer academic publishers.

Throndsen, I. S. (2005): *Selvregulert læring av matematikkferdigheter*. Det utdanningsvitenskapelige fakultet, UiO.

Vavik, L. (1999): *Læring og informasjonsteknologi.* http://stud.hsh.no/lu/inf/hia/lek2/kong.htm

Vygotsky, L. S. (2001): *Tenkning og tale*. Gyldendal Norsk Forlag AS.

# Vedlegg

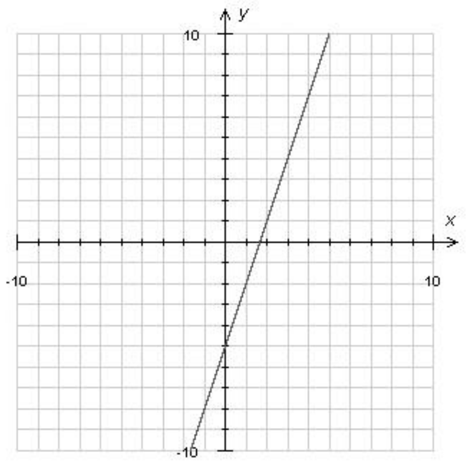
# Vedlegg 1

Du vil her møte flere slags oppgaver. Noen av disse vil ha en form du kjenner, mens andre kan virke fremmede. Forsøk allikevel å svare så godt du kan, selv om noen kan være vanskelige.

(Sett kryss i □)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Kjønn: | □ Jente | | □ Gutt | |
| Skole: | | | | |
| Klasse: | □ 1T | □ 1P | □ S1 | □ R1 | □ 2P |
| Lærebok: | □ Cappelen | □ Aschehoug | Annen: | |
| Kalkulator: | □ Casio | □ Texas | Annen: | |

**Oppgave 1.**



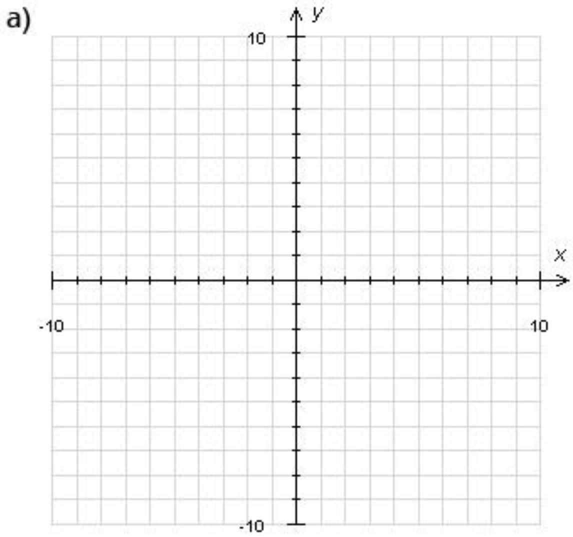

Hvilket funksjonsuttrykk passer til grafen? (Sett ett kryss)

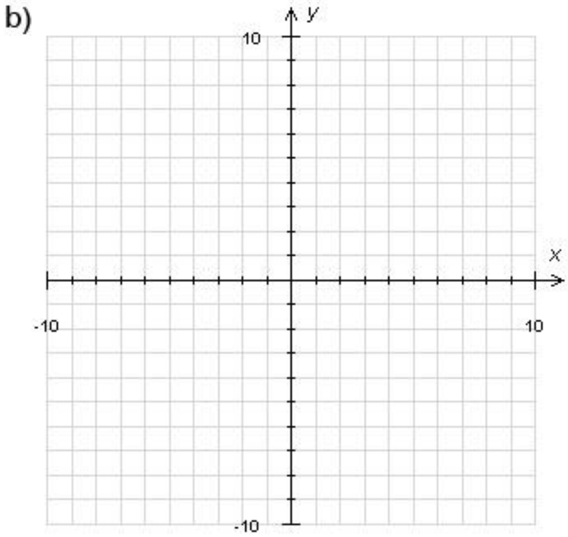
| | | | |
|---|---|---|---|
| □ y = x – 5 | □ y = 5x + 2 | □ y = 3x - 5 | □ y = 5 -3x |

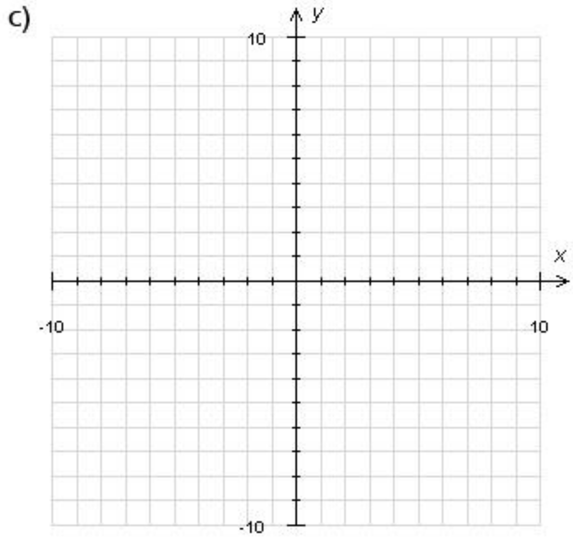
**Oppgave 2.**

Her er tre funksjoner. Tegn grafene.

a) y=x b) 2x + y = -8 c) y=5



**Oppgave 3.**

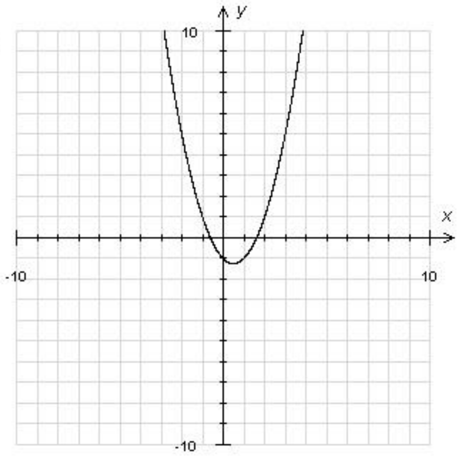
| x | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 |

Hvilke funksjonsuttrykk passer til tabellen? (Sett kryss)

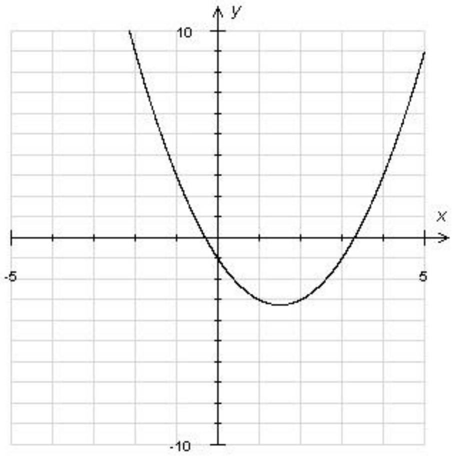
| | | | |
|---|---|---|---|
| ☐ y = x + 7 | ☐ y = 8x | ☐ x – y + 7 = 0 | ☐ y = x + 3 |

**Oppgave 4.**

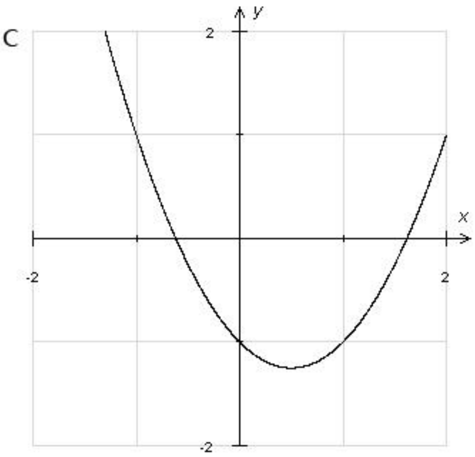
A




B




C

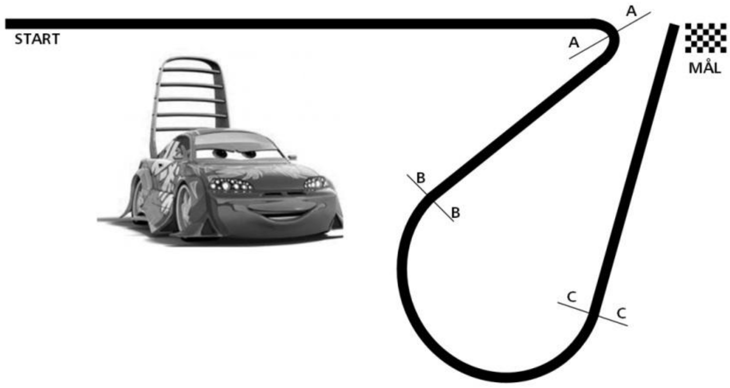



Hvilke av disse grafene har samme funksjonsuttrykk? (Sett et kryss)

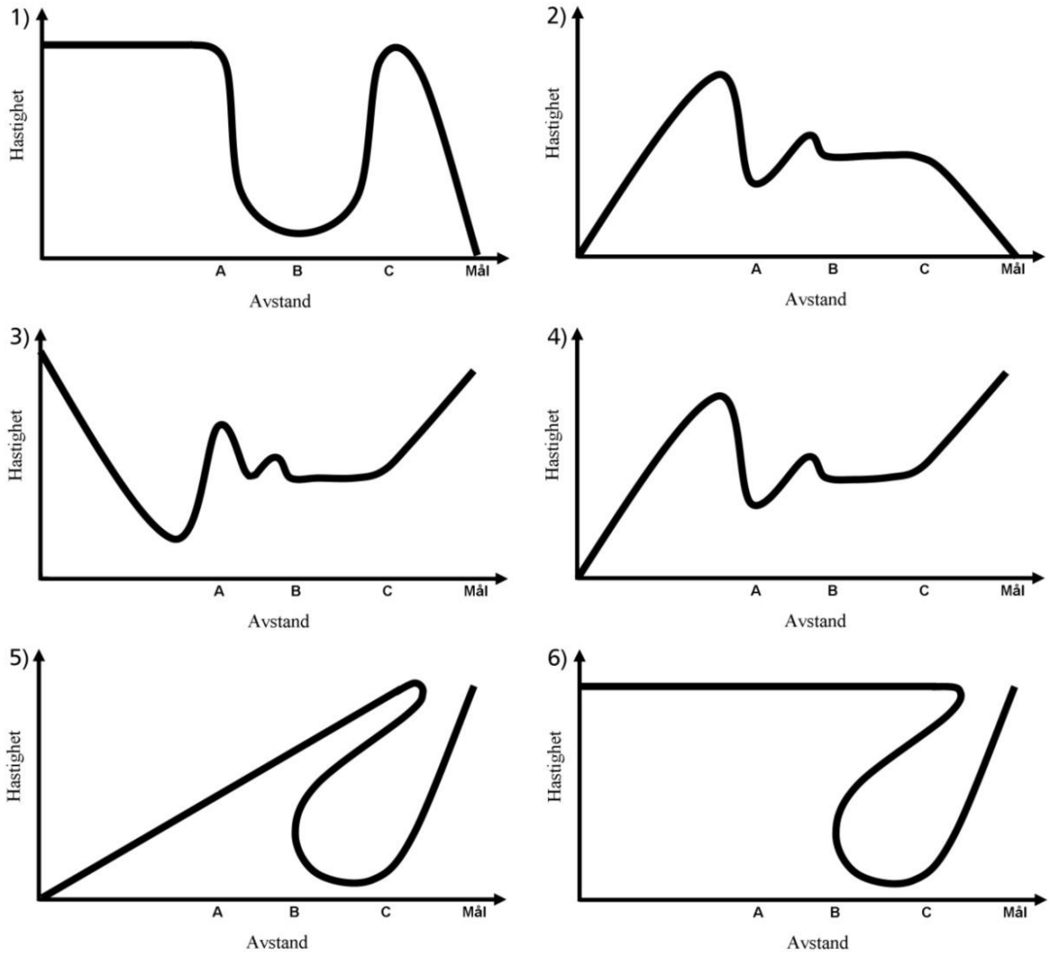
| | | | |
|---|---|---|---|
| ☐ A og B | ☐ A og C | ☐ B og C | ☐ Ingen av dem |

**Oppgave 5.**

Figuren viser banen til en fartsetappe i et rally.




Hvilken av grafene under mener du beskriver hastigheten til bilen best?

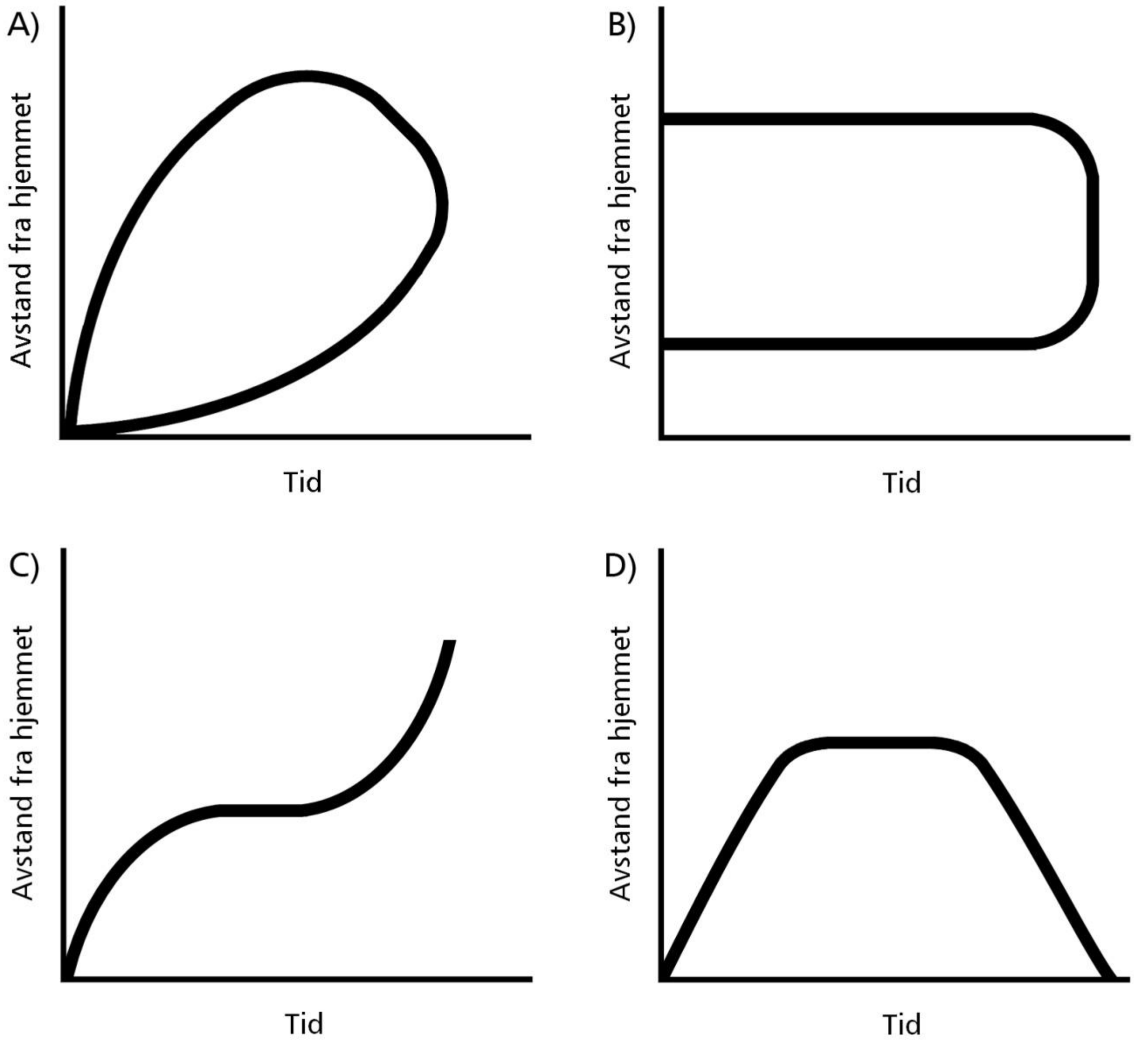



| | |
|---|---|
| Svar: | |

**Oppgave 6.**

Hanne skal gå til postkontoret for å levere en pakke. Hun går hjemmefra med jevn hastighet. På postkontoret må hun stå i kø før hun blir ekspedert. Deretter går hun hjem med samme hastighet.

Hvilken av grafene under mener du beskriver turen til Hanne best?




| | |
|---|---|
| Svar: | |
| Hvorfor passer denne best? | |

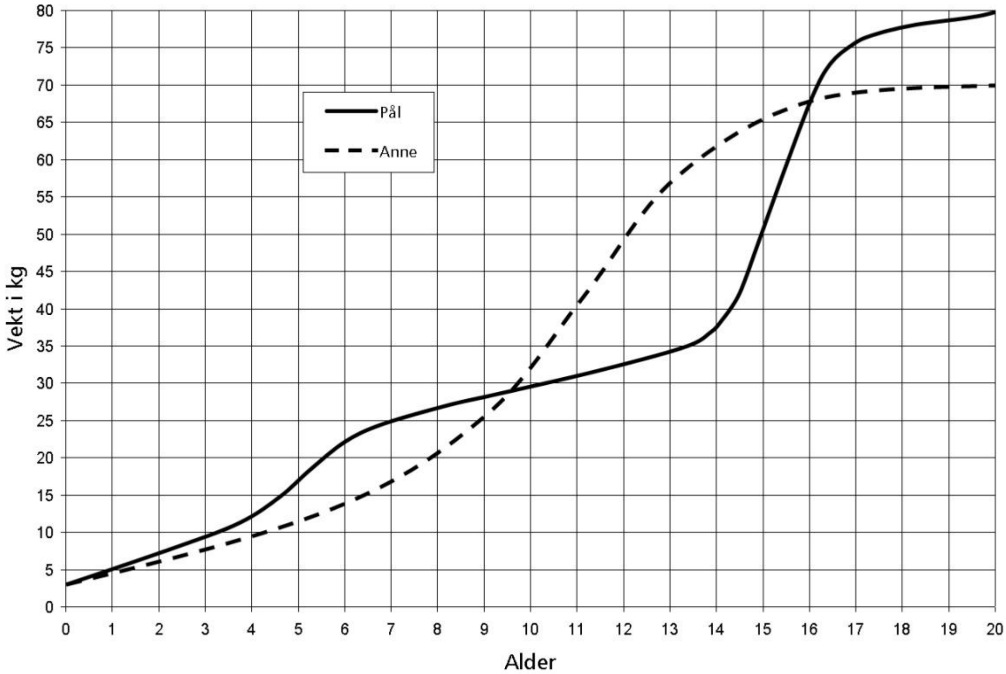
**Oppgave 7.**

En ungdomsklubb leier ut lokalene sine til skolefester. De som leier, må betale en grunnleie på kr 600 pluss et tillegg på kr 125 per person som deltar. Finn et funksjonsuttrykk for de samlede kostnadene K når det deltar x personer.

Hvilket funksjonsuttrykk er korrekt? (Sett et kryss)

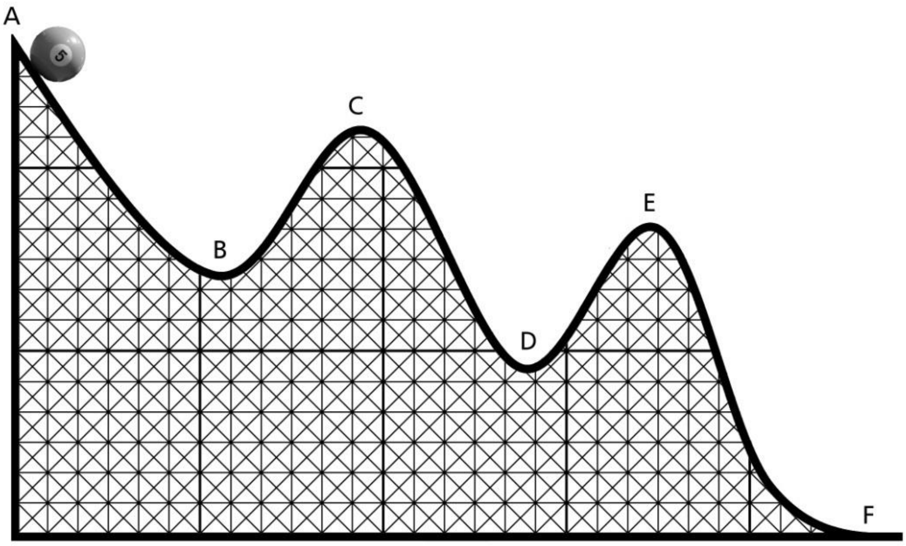
| | | | |
|---|---|---|---|
| ☐ K(x) = 600x + 125 | ☐ K(x) = 725 + x | ☐ K(x) = 600 – 125x | ☐ K(x) = 125x + 600 |

**Oppgave 8.**



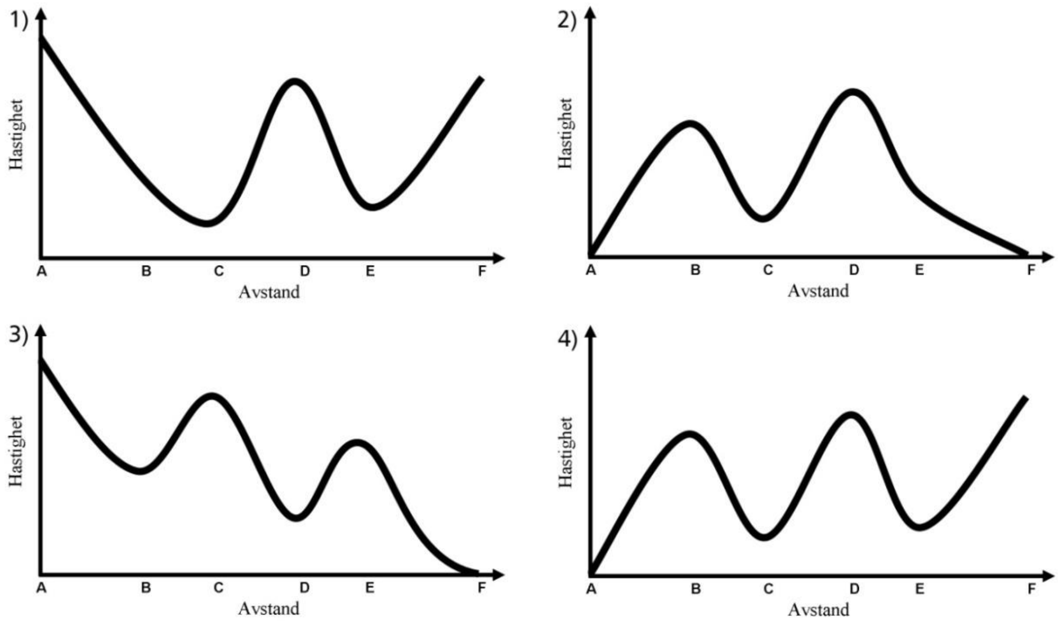

Diagrammet viser hvordan vekten til Pål og Anne øker fra fødsel til de er 20 år. Hvem av de to vokser raskest når de er 15 år? ________________________

**Oppgave 9.**




En kule triller fritt langs banen som er vist over.

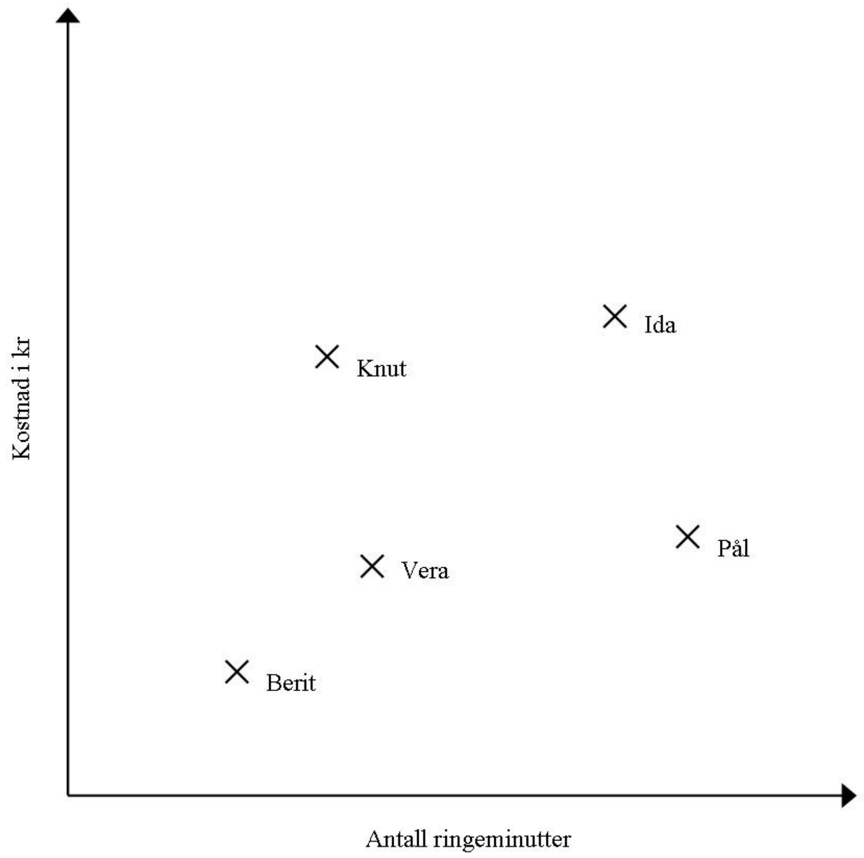
Under er det skissert fire ulike grafer. Hvilken av disse mener du viser best hvordan hastigheten til kula varierer fra den slippes på toppen av bana (A) til den når endepunktet (F).




| Svar: | |
|---|---|

**Oppgave 10.**

Fem elever har hver sin mobiltelefon. De har forskjellig abonnement. Plottene under viser antall ringeminutter og kostnad for hver av dem i løpet av en helg. Vi ser bort fra månedsavgiften/fastprisen på abonnementet.




Hvilken elev har ringt mest? ____________

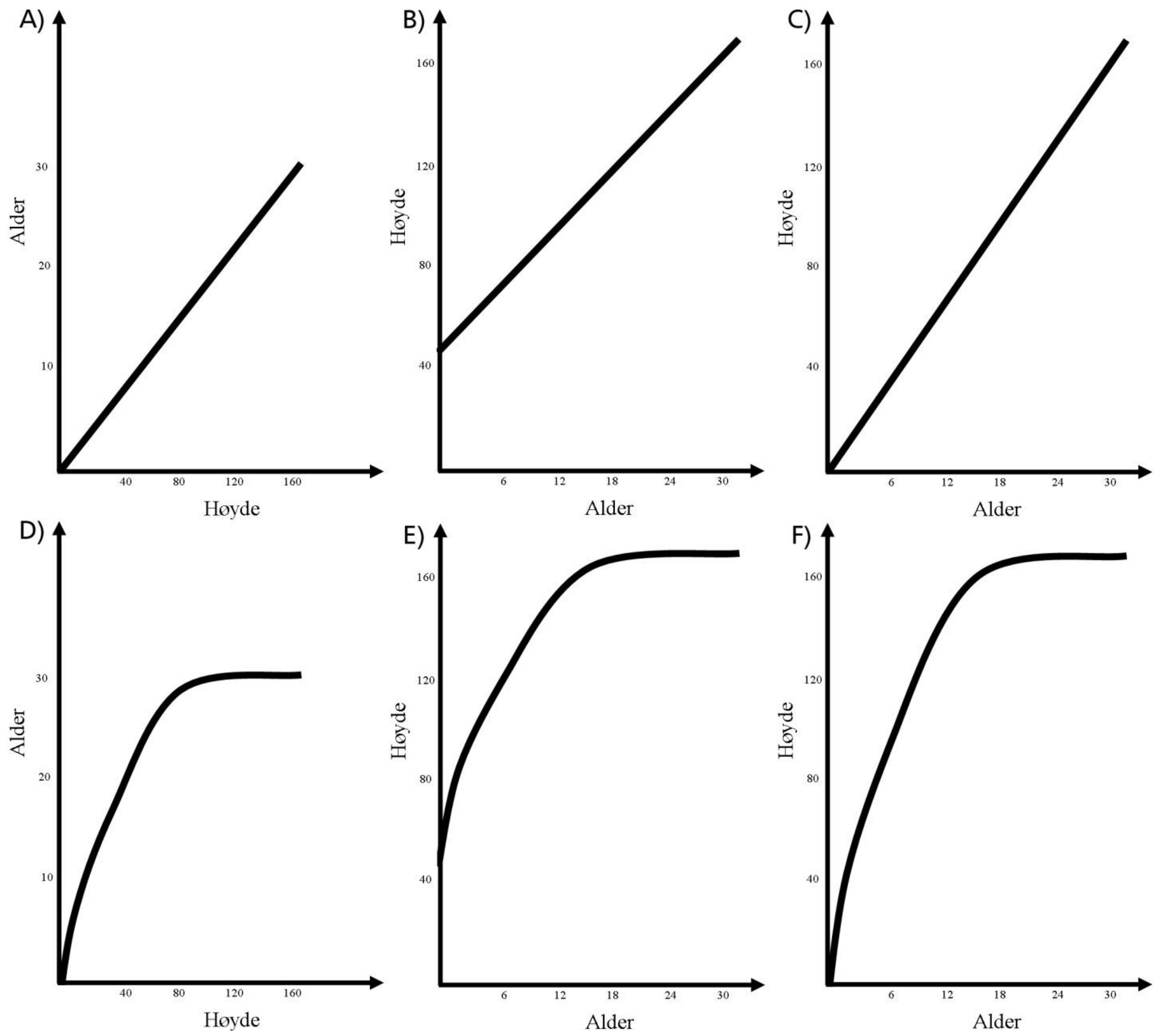
Hvilken elev har den største kostnaden? ____________

Hvilke elever betaler det samme pr ringeminutt? ____________

Hvilken elev betaler mest pr ringeminutt? ____________

**Oppgave 11.**

Hvilken av grafene under mener du best viser sammenhengen mellom en persons høyde og alder fra 0 til 30 år.




| | |
|---|---|
| Svar: | |

Og til slutt vil jeg gjerne stille deg noen ekstra spørsmål:

**Det er mange grunner til å lære matematikk. Sett inn et tall fra en skala på 1 til 5 hva du mener er viktige grunner til å lære matematikk.**

| Ikke viktig 1 | 2 | 3 | 4 | Svært viktig 5 |
|---|---|---|---|---|

| | |
|---|---|
| a) Å lære metoder for å løse problemer | |
| b) Å kunne bruke matematikk i seinere studier | |
| c) Å holde alle studieveier åpne | |
| d) Å kunne bruke det i andre fag (fysikk, økonomi o.l.) | |
| e) Å kunne bruke matematikk i dagliglivet | |
| f) Å kunne ta stilling til viktige politiske spørsmål (f.eks. statsbudsjett, rentenivå, skattesystem) | |
| g) Å kunne ivareta egne interesser som samfunnsborger (f.eks. lønn, skatt, lån) | |

| Svært dårlig 1 | 2 | 3 | 4 | Svært godt 5 |
|---|---|---|---|---|

| | |
|---|---|
| Hvor godt liker du matematikkfaget? | |

| Svært dårlig 1 | 2 | 3 | 4 | Svært godt 5 |
|---|---|---|---|---|

| | |
|---|---|
| Hvor godt pleier du å gjøre det i matematikk på skolen? | |

| Helt uenig 1 | 2 | Nøytral 3 | 4 | Helt enig 5 |
|---|---|---|---|---|

| | |
|---|---|
| Når det er noe jeg ikke forstår i matematikk, prøver jeg alltid å finne mer informasjon som kan gjøre det klarere. | |

# Vedlegg 2

| Resultat | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| [0%,25%> | 2 % | 3 % | 2 % | 0 % | 1 % |
| [25%,50%> | 4 % | 7 % | 13 % | 5 % | 3 % |
| [50%,75%> | 1 % | 3 % | 17 % | 16 % | 6 % |
| [75%,100%] | 0 % | 0 % | 2 % | 9 % | 4 % |

**Tabell 1. Pivot som viser sammenheng mellom hvor høy skår eleven har fått på de diagnostiske oppgavene og hvor motivert han er.**

| Resultat | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| [0%,25%> | 2 % | 2 % | 4 % | 0 % | 1 % |
| [25%,50%> | 3 % | 5 % | 11 % | 10 % | 3 % |
| [50%,75%> | 1 % | 4 % | 15 % | 18 % | 5 % |
| [75%,100%] | 0 % | 0 % | 3 % | 10 % | 3 % |

**Tabell 2. Pivot som viser sammenheng mellom hvor høy skår eleven har fått på de diagnostiske oppgavene og elevens vurdering av egne prestasjoner i matematikk generelt.**

| Resultat | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| [0%,25%> | 2 % | 3 % | 2 % | 1 % | 1 % |
| [25%,50%> | 1 % | 3 % | 15 % | 7 % | 6 % |
| [50%,75%> | 0 % | 3 % | 14 % | 20 % | 6 % |
| [75%,100%] | 0 % | 0 % | 3 % | 9 % | 3 % |

**Tabell 3. Pivot som viser sammenheng mellom hvor høy skår eleven har fått på de diagnostiske oppgavene og hvor reflektert han er over egen læring.**